Mathématiques 1

Résumé du cours

Najib Idrissi

Université de Paris

Dernière mise à jour : juin 2021

Table des matières

Première partie

Mathématiques Élémentaires 1

1. Étude de fonctions

1.1. Fonctions réelles d'une variable réelle

1.1.1. Définitions de base

On étudie les fonctions d'une variable réelle $f : A \to B$. Une fonction a :

- un ensemble de départ A (dans ce chapitre, $A \subset \mathbb{R}$);
- un ensemble de définition $D_f \subset A$, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels on peut calculer $f(x)$;
- un ensemble d'arrivée B, l'ensemble auquel les valeurs de f appartiennent (dans ce chapitre, $B \subset \mathbb{R}$).

Remarque 1.1.1. Le domaine de définition peut dépendre de l'expression. Par exemple, le domaine de définition de $f(x) = x^2/x$ est $\mathbb{R}^*$, mais le domaine de définition de $g(x) = x$ est $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2. L'**image** d'une fonction $f : A \to B$ est l'ensemble $\operatorname{im} f \subset B$ des valeurs atteintes par la fonction. En d'autres termes, c'est l'ensemble des points y tel que il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $f(x) = y$.

Pour déterminer l'image de f, on prend l'équation $y = f(x)$, on suppose que $y \in B$ est fixé, et on essaye de résoudre en cherchant $x \in A$. Si on y arrive, alors y est dans l'image, sinon, il n'y est pas.

Exemple 1.1.3. L'image de $f(x) = 1/x$ est $\mathbb{R}^*$. L'image de $f(x) = x^2$ est $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.1.4. La **courbe représentative** (aussi appelée « graphe ») d'une fonction f est l'ensemble des points du plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 1.1.5. La courbe représentative de $f(x) = x^2$ est... celle de $f(x) = 1/x$ est...

Le but de ce chapitre va être d'apprendre à tracer des courbes représentatives.

1.1.2. Parité, périodicité

Définition 1.1.6. Une fonction $f : A \to B$ est dite **paire** (resp. **impaire**) si :

- son ensemble de définition est symétrique : si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$;

- $\forall x \in D_f$, on a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

C'est une propriété qui se voit sur le graphe de la fonction :

- le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Remarque 1.1.7. Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires.

Exemple 1.1.8. La fonction $f(x) = x^2$ est paire : $f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x)$. La fonction $f(x) = 1/x$ est impaire : $f(-x) = 1/(-x) = -1/x = -f(x)$. La fonction $f(x) = 1 + x$ n'est ni paire ni impaire.

Définition 1.1.9. Soit $T > 0$. Une fonction f est T-périodique si :

- son ensemble de définition est tel que $x \in D_f \iff x + T \in D_f$;
- $\forall x \in D_f$, on a $f(x + T) = f(x)$.

Une fonction f est périodique si il existe un $T > 0$ tel que f est T-périodique.

Ça se voit aussi sur le graphe de la fonction : on prend le graphe sur $[0, T]$ et on le translate de T en T pour obtenir le graphe complet.

Exemple 1.1.10. Une fonction constante est T-périodique pour tout $T > 0$.

1.2. Fonctions usuelles

1.2.1. Polynômes et fonctions rationnelles

Définition 1.2.1. Un **polynôme** est une fonction obtenue à partir de produits et de sommes de constantes et de la fonction x, c'est-à-dire une fonction du type :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d,$$

avec des coefficients $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$. Si $a_d \neq 0$, alors d est le degré du polynôme, noté $\deg P$.

Définition 1.2.2. Une **racine** d'un polynôme est un point $x \in \mathbb{R}$ où le polynôme s'annule : $P(x) = 0$.

Propriété 1.2.3. *Le domaine de définition d'un polynôme est* $\mathbb{R}$.

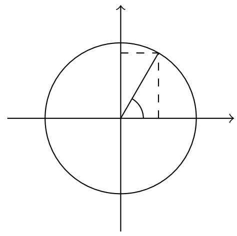
Propriété 1.2.4. *La somme de deux polynômes est un polynôme. Le produit de deux polynômes est un polynôme.*

Définition 1.2.5. Une fonction rationnelle est une fonction obtenue comme le quotient de deux polynômes :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_l x^l}.$$

Propriété 1.2.6. *Le domaine de définition de* $R(x) = P(x)/Q(x)$ *est* $\mathbb{R} \setminus \{$*racines de* $Q\}$.

1.2.2. Fonctions trigonométriques



On définit les fonctions **sinus** et **cosinus** à partir du cercle trigonométrique. Pour rappel, un tour complet = 360 degrés = 2π radians. Si α est un angle exprimé en radians, on trace le point qui correspond sur le cercle unité : son abscisse est $\cos\alpha$, son ordonnée est $\sin\alpha$.

On définit également la **tangente** : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Propriété 1.2.7. *On a les domaines de définition suivants :* $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$, $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété 1.2.8. *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont* 2π*-périodiques. La fonction* $\tan$ *est* π*-périodique.*

Propriété 1.2.9. *Les images de* $\cos$ *et* $\sin$ *sont* $[-1, 1]$. *L'image de* $\tan$ *est* $\mathbb{R}$.

Formules trigo :

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Il faut connaître les courbes représentatives (cf. cours).

1.2.3. Puissances et logarithmes

Définition 1.2.10. Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tout x. On l'appelle la fonction **exponentielle** $\exp(x) = e^x$.

Définition 1.2.11. Pour tout $y > 0$, il existe un unique nombre réel x tel que $e^x = y$. On définit donc le **logarithme népérien** $\ln y = x$ comme étant ce nombre.

Propriété 1.2.12. *Domaines de définition :* $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. *Images :* $\operatorname{im}\exp = \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{im}\ln = \mathbb{R}$. *Elles sont toutes les deux strictement croissantes. Addition et produit :*

$$e^{a+b} = e^a e^b, \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b,$$
$$(e^a)^b = e^{ab}, \qquad \ln(a^b) = b\ln a.$$

Valeurs spéciales :

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \approx 2,718\ldots$$
$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1.$$

Propriété 1.2.13. ln *et* exp *sont inverses l'une de l'autre (cf. section suivante) :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x, \quad \forall y > 0,\ e^{\ln y} = y.$$

Dit autrement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ e^x = y \iff x = \ln y.$$

Soit $a > 0$. On peut définir la **puissance en base** a et le **logarithme en base** a :

$$\exp_a(x) = a^x := e^{x \ln a}, \qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Par définition, $\exp = \exp_e$ et $\ln = \log_e$.

1.3. Composée de fonctions

Définition 1.3.1. Soit $f : A \to B$ une fonction et $y \in B$. Les **antécédents** de y par f sont les $x \in A$ tels que $f(x) = y$. On dit aussi que y est **l'image** de x par f.

Rappel : y est dans l'image de f si et seulement si y a au moins un antécédent par f.

Définition 1.3.2. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Leur **composée** est la fonction $g \circ f$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque 1.3.3. L'ordre est important : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Propriété 1.3.4. *Le domaine de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des $x \in D_f$ tels que $f(x) \in D_g$.*

Définition 1.3.5. Une fonction $f : A \to B$ définie sur tout A est dite :

- **injective** si tout $y \in B$ a *au plus* un antécédent ;
- **surjective** si tout $y \in B$ a *au moins* un antécédent ;
- **bijective** si tout $y \in B$ a *exactement* un antécédent.

Propriété 1.3.6. *$f : A \to B$ est surjective si et seulement si l'image de f est B tout entier.*

Propriété 1.3.7. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *f est injective ;*
- *pour tous $x, y \in A$, si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$;*
- *pour tous $x, y \in A$, si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$.*

Théorème 1.3.8. *Si $f : A \to B$ est bijective, alors il existe une fonction $g : B \to A$ telle que :*

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = x, \quad \forall y \in B, (f \circ g)(y) = y.$$

La fonction g est unique et est notée f^{-1}. On l'appelle ***l'inverse*** *de f.*

Exemple 1.3.9. L'inverse de exp est ln.

Exemple 1.3.10. L'inverse de $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, f(x) = x^2$ est la fonction $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Propriété 1.3.11. *La courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.*

Méthode pour étudier $f : A \to B$:

- fixer $y \in B$ et tenter de résoudre $f(x) = y$ en cherchant $x \in A$;
- si quel que soit y on trouve toujours exactement un x, c'est gagné : f est bijective, et le x qu'on a trouvé (qui dépend de y) est $f^{-1}(y)$;
- sinon :
  - si on trouve toujours au moins un x (mais parfois plusieurs), alors f est surjective ;
  - sinon on en trouve toujours au plus un (mais parfois aucun), alors f est injective ;
  - dans les autres cas, f n'est ni injective, ni surjective.

1.4. Rudiments d'analyse

1.4.1. Limites

Définition 1.4.1. Limite à droite : soit f une fonction, et a un réel tel que $]a, a + \varepsilon[\subset D_f$ pour un $\varepsilon > 0$.

- On dit que $\lim_{x \to^+} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x > a$ suffisamment proche de a.
- On dit que $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ (pour un $l \in \mathbb{R}$) lorsque tout intervalle ouvert $I \ni l$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x > a$ suffisamment proche de a.

Définition 1.4.2. Limite à gauche : soit f une fonction et a un réel tel que $]a-\varepsilon, a[\subset D_f$ pour au moins un $\varepsilon > 0$.

- On dit que $\lim_{x\to{}^+} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x < a$ suffisamment proche de a.

- On dit que $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ (pour un $l \in \mathbb{R}$) lorsque tout intervalle ouvert $I \ni l$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x < a$ suffisamment proche de a.

Définition 1.4.3. Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = l$ (pour $l \in \mathbb{R}$), alors on dit que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. De même, si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

On a le tableau suivant pour les somme de limites :

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	0	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$l'>0$	l'	$l+l'$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$l'<0$	l'	$l+l'$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Et pour les produits :

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	0	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$l'>0$	0	ll'	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$l'<0$	0	ll'	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Pour trouver la limite de f/g, on fait la limite de $f \times (1/g)$. Ne pas oublier les formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $\infty \times 0$, ∞/∞ et $0/0$.

Limites classiques (les paramètres α et β sont > 0)

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Théorème 1.4.4 (Théorème des gendarmes)**.** *Soit f, g, h des fonctions définies sur un voisinage de a et telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si f et h admettent une même limite l en a (càd $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$) alors g admet aussi pour limite l en a.*

1.4.2. Asymptotes

Définition 1.4.5. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (pour $a \in \mathbb{R}$), le graphe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

Définition 1.4.6. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ (pour $l \in \mathbb{R}$), le graphe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$.

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors il y a *peut-être* une asymptote oblique. Posons-nous dans la situatios $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (les autres sont similaires). On distingue plusieurs cas :

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$, le graphe de f a une **branche parabolique de direction** (Ox).
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$, le graphe de f a une **branche parabolique d'équation** (Oy).
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = a$ pour un certain $a \neq 0$:
  - Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$, alors il y a une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.
  - Sinon, le graphe de f a pour direction asymptotique la droite $y = ax$.

1.4.3. Continuité

Définition 1.4.7. Soit f une fonction et $a \in D_f$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset D_f$ pour au moins un ε. On dit que f est **continue en** a si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. On dit que f est **continue** si f est continue en tout point a de son domaine de définition.

Exemple 1.4.8. Les polynômes, les fractions rationnelles, l'exponentielle, le logarithme, le cosinus, le sinus, la tangente sont continues.

Propriété 1.4.9. *La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues sont continues.*

Propriété 1.4.10. *Soit f une fonction telle que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, et soit g une autre fonction. Si g est continue en l, alors $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(l)$.*

Remarque 1.4.11. Ce n'est pas vrai si g n'est pas continue en l !

Corollaire 1.4.12. *La composée de deux fonctions continues est continue.*

Définition 1.4.13. Soit I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ existe, alors on peut **étendre f par continuité en** a en posant $f(a) = l$.

Exemple 1.4.14. On peut étendre $f(x) = x^2/x$ par continuité en zéro, en posant $f(0) = 0$.

Théorème 1.4.15 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur A, et I un intervalle inclus dans A. Alors l'image de I est aussi un intervalle.*

Corollaire 1.4.16. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.*

1.4.4. Dérivabilité

Définition 1.4.17. Soit f une fonction et $a \in D_f$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset D_f$ pour au moins un ε. La fonction f est **dérivable en** a si le graphe de f admet une droite tangente au point $(a, f(a))$. La pente de cette droite tangente est appelée la **dérivée de f en** a et est notée $f'(a)$.

Propriété 1.4.18. *On a $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (limite du taux d'accroissement). La fonction est dérivable en a $\iff$ la limite existe.*

Définition 1.4.19. Une fonction f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Dans ce cas, on définit une fonction f', appelée la **dérivée de** f, par $x \mapsto f'(x)$.

Propriété 1.4.20. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. En d'autres termes, si f n'est pas continue en a, alors f ne peut pas être dérivable en a.*

Exemple 1.4.21. Les polynômes, les fractions rationnelles, l'exponentielle, le logarithme, le cosinus, le sinus, la tangente sont dérivables.

Règles de calcul, dérivées usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$u+v$	$u'+v'$	uv	$u'v+uv'$
$1/u$	$\frac{-u'}{u^2}$	u/v	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\exp x = e^x$	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$1+\tan^2 x = 1/\cos^2(x)$

Propriété 1.4.22. *Soit f et g deux fonctions composables et dérivables. Alors on a*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)).$$

Exemple 1.4.23. Comment calculer la dérivée de $u(x) = \sqrt{x^2+1}$? On écrit $u = g \circ f$ où $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x^2 + 1$. Alors

$$u'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Exemple 1.4.24. On en déduit les dérivées $(e^u)' = u'e^u$ et $(\ln u)' = u'/u$.

Propriété 1.4.25. *Soit f une fonction bijective. Si f est dérivable en a, et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ avec*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Propriété 1.4.26. *Soit f une fonction dérivable* définie sur un intervalle. *Elle est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si f' est positive (resp. strictement positive). Elle est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si f' est négative (resp. strictement négative).*

Remarque 1.4.27. La condition « définie sur un intervalle » est essentielle. Par exemple, la fonction $f(x) = 1/x$ a une dérivée strictement négative. Elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ séparément, mais pas sur la réunion des deux.

1.4.5. Dérivées secondes – convexité et concavité

Définition 1.4.28. Soit f une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si f' est encore dérivable, on note f'' la dérivée de f', et on l'appelle sa dérivée seconde.

Remarque 1.4.29. Ensuite ça continue : $f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)} \dots$

Définition 1.4.30. Une fonction dérivable est **convexe** si sa dérivée est croissante. Elle est **concave** si sa dérivée est décroissante.

Propriété 1.4.31. *Une fonction deux fois dérivable est convexe (resp. concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).*

Propriété 1.4.32. *Une fonction est convexe (resp. concave) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. en-dessous) de toutes ses tangentes.*

Remarque 1.4.33. Soit f une fonction. Son épigraphe est l'ensemble $\{(x,y) \mid y \geq f(x)\}$ et son hypographe est défini de manière similaire. Une fonction est convexe (resp. concave) si et seulement si son épigraphe (resp. hypographe) est convexe.

Définition 1.4.34. Une fonction f atteint un **maximum local** en $a \in D_f$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x dans un intervalle ouvert autour de a. De même, on parle de **minimum local** si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x dans un intervalle ouvert autour de a.

Définition 1.4.35. Une fonction f atteint un **maximum** en $a \in D_f$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in D_f$. De même, elle atteint un **minimum** en a si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x.

Remarque 1.4.36. Un maximum est toujours un maximum local. La réciproque est fausse.

Propriété 1.4.37. *Si f est dérivable et atteint un maximum local ou un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Remarque 1.4.38. La réciproque est fausse (p.ex. $f(x) = x^3$ en $a = 0$).

Propriété 1.4.39. *Si f est deux fois dérivable, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f atteint un minimum local en a. De même, si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors c'est un maximum local.*

Remarque 1.4.40. Si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure sans plus d'informations. Ça peut être un maximum local, un minimum local, ou aucun des deux.

1.4.6. Tracé des courbes représentatives

Pour étudier une fonction f, on applique une méthode étape par étape :

1. On détermine le domaine de définition D_f.
2. On détermine si f est continue, dérivable, etc.
3. À l'aide de la dérivée, on établit le tableau de variations.
4. On cherche les extremums locaux et on établit leur type.
5. On détermine la convexité/concavité de f.
6. On calcule les limites aux bornes (en $\pm\infty$ et aux points de discontinuité).
7. On détermine les asymptotes éventuelles.
8. Avec tous ces éléments, on trace une courbe.

2. Arithmétique

3. Nombres complexes

3.1. Définitions de base

Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i est une constante vérifiant $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 3.1.1. On note $x = \Re z$ et $y = \Im z$. On appelle l'écriture $z = x + iy$ **l'écriture cartésienne** du nombre complexe z.

Définition 3.1.2. On note $\bar{z} = x - iy$ le **conjugué** de z.

Définition 3.1.3. Le **module** de z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition 3.1.4. Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathbb{R}^2$. Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé **l'affixe** de M. Réciproquement, M est appelé **l'image** de z.

3.1.1. Opérations algébriques

Définition 3.1.5. Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. On définit :

- la somme $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- le produit $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;
- si $z_1 \neq 0$, l'inverse $1/z_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Proposition 3.1.6. *$\bar{\bar{z}} = z$, $|\bar{z}| = |z|$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$, et $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.*

Proposition 3.1.7. *$\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.*

Proposition 3.1.8 (Inégalité triangulaire)**.** *$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.*

Corollaire 3.1.9. *$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$, $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$.*

3.1.2. Forme polaire

Définition 3.1.10. Soit $z = x + iy$. On définit

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Remarque 3.1.11. En particulier, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.12. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $1/e^z = e^{-z}$.

Proposition 3.1.13. *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$.*

Proposition 3.1.14. *Pour $z \in \mathbb{C}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z| \cdot e^{i\theta}$.*

Définition 3.1.15. Le nombre θ défini ci-dessus est appelé **l'argument** de z, noté $\arg z$.

Remarque 3.1.16. L'argument de z n'est défini qu'à 2π près !

Proposition 3.1.17. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$ *et* $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.

Corollaire 3.1.18. $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$.

Proposition 3.1.19. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

3.2. Racines carrées et équations du second degré

Théorème 3.2.1. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors l'équation $X^2 = z$ admet exactement deux solutions, appelées les **racines carrées de** z.*

Remarque 3.2.2. Le nombre $z = 0$ n'admet qu'une seule racine carrée.

Proposition 3.2.3. *Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors les racines carrées de z sont $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ et $\sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)}$.*

Proposition 3.2.4 (Méthode pour trouver les racines carrées d'un nombre sous forme cartésienne)**.** *Si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors ses racines carrées $r = a + ib$ satisfont :*

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = x, \\ 2ab = y, \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Proposition 3.2.5. *On considère l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ. Alors les solutions de l'équation sont*

$$z_+ = \frac{-b + \delta}{2a}, \qquad z_- = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Remarque 3.2.6. Il y a toujours des solutions, même si $\Delta < 0$! Si $\Delta = 0$ il y a exactement une solution, si $\Delta \neq 0$ il y a exactement deux solutions.

3.3. Racines $n$ièmes et racines primitives

Théorème 3.3.1. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit $n \geq 1$ un entier naturel. Alors il existe exactement n nombres complexes distincts qui satisfont l'équation $X^n = z$. On les appelle les **racines nièmes de** z.*

Remarque 3.3.2. Le nombre $z = 0$ n'a qu'une seule racine $n$ième : lui-même.

Proposition 3.3.3. *Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors les racines nièmes de z sont $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ où*

$$r_k = \sqrt[n]{r} \cdot \exp(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}).$$

Définition 3.3.4. On appelle les racines $n$ièmes de $z = 1$ les **racines de l'unité.** Grâce au théorème, elles sont données par $r_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leq k < n$.

Exemple 3.3.5. Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1. Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, -1, i et $-i$.

Remarque 3.3.6. Il est difficile de trouver les racines $n$ièmes d'un nombre écrit sous forme cartésienne.

Définition 3.3.7. Une racine $n$ième z de l'unité est dite **primitive** si $z^n = 1$ mais $z^k \neq 0$ pour $k < n$.

Exemple 3.3.8. Les racines quatrièmes primitives de l'unité sont i et $-i$.

Proposition 3.3.9. *Le nombre $r_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine nième primitive si et seulement si k et n sont premiers entre eux.*

3.4. Formules d'Euler et de Moivre

Rappel : pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Proposition 3.4.1 (Formules d'Euler)**.** *On a*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

Proposition 3.4.2 (Formule de Moivre)**.** *Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$ un entier naturel, on a*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

3.5. Formule du binôme de Newton

Rappels :

Définition 3.5.1. Soit n un entier naturel. Sa **factorielle** $n!$ est définie par $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. En particulier $0! = 1$.

Définition 3.5.2. Soit $0 \leq k \leq n$ des entiers naturels. On définit le coefficient binomial « k parmi n » (parfois noté C_n^k) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k}.$$

Pour calculer les coefficients binomiaux, on a la formule qui donne le triangle de Pascal :

Proposition 3.5.3. *On a*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Théorème 3.5.4 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soit $a, b \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes et soit $n \geq 0$ un entier naturel. Alors*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} a^{n-1}b + \underbrace{\binom{n}{2}}_{=\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-2}b^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^n.\end{aligned}$$

Exemple 3.5.5. En particulier, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1, \\ (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ etc.}\end{aligned}$$

3.6. Applications à la trigonométrie

Proposition 3.6.1 (Formules d'addition)**.** *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

Démonstration. On a $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$. $\square$

Corollaire 3.6.2. *On*

$$\cos(2\alpha)\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Grâce aux formules d'Euler et au binôme de Newton, on peut « **linéariser** » $\cos^n\alpha$ et $\sin^n\alpha$ pour $n \geq 0$. La méthode générale consiste à développper $\cos^n\alpha = (\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2})^n$ grâce au binôme de Newton et à regrouper les termes similaires (de même pour $\sin^n\alpha$).

Exemple 3.6.3. On a par exemple :

$$\cos^3\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha})$$
$$= \frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos(\alpha).$$

Grâce à la formule de Moivre et au binôme de Newton, on peut « **dupliquer** » $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ pour $n \geq 0$. La méthode générale consiste à développer $\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n$ grâce au binôme de Newton puis à identifier parties réelle et imaginaire.

Exemple 3.6.4. On a par exemple :

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^3\\ &= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha + \sin^3\alpha),\end{aligned}$$

d'où on déduit que $\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$ et $\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha + \sin^3\alpha$.

3.7. Transformations du plan

Soit A et B deux points du plan. On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui relie A et B. En termes de coordonnées, si on $A(x,y)$ et $B(x',y')$, alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de coordonnées $(x'-x, y'-y)$.

Définition 3.7.1. Soit $v(\alpha,\beta)$ un un vecteur, on définit la translation de vecteur v par :

$$\begin{aligned}t_v : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ A &\mapsto A + v\\ (x,y) &\mapsto (x+\alpha, y+\beta).\end{aligned}$$

Proposition 3.7.2. *Si l'affixe de A est z, alors l'affixe de $t_v A$ est $z + v$.*

Définition 3.7.3. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un point et $\lambda > 0$ un paramètre réel. On définit l'homothétie de centre Ω et de rapport λ par :

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

par l'équation $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 3.7.4. *Soit ω l'affixe de Ω. Si M a pour affixe z, alors $h_{\Omega,\lambda}(M) = M'$ a pour affixe z' qui satisfait $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.*

Définition 3.7.5. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un point et $\theta \in \mathbb{R}$ un angle. On définit la rotation de centre Ω et d'angle θ :

$$\begin{aligned} r_{\Omega,\theta} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

en demandant que les longueurs ΩM et $\Omega M'$ soient égales et que l'angle (orienté) $\widehat{M\Omega M'}$ soit de θ.

Proposition 3.7.6. *Soit ω l'affixe de Ω. Si M a pour affixe z, alors $r_{\Omega,\lambda}(M) = M'$ a pour affixe le nombre $z' \in \mathbb{C}$ qui satisfait $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.*

4. Introduction à l'algèbre linéaire

4.1. Résolution de systèmes linéaires

4.1.1. Définition

Définition 4.1.1. Un **système d'équations linéaires** à k équations est n inconnues est un système d'équations qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k, \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i sont des constantes réelles (ou complexes). Une **solution** du système est un $n$uplet de valeurs $(x_1, \dots, x_n)$ tel que si l'on remplace les inconnues par la solution dans le système, les équations sont vérifiées.

Exemple 4.1.2. Le couple $(1, 2)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Définition 4.1.3. Deux systèmes sont **équivalents** si leurs ensembles de solutions sont égaux.

Pour simplifier l'écriture, on peut représenter un tel système sous la forme d'une matrice « augmentée » :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} & b_k \end{array}\right)$$

Remarque 4.1.4. Si on écrit le système sous forme d'une matrice augmentée, il faut faire très attention à l'ordre des colonnes et des inconnues.

4.1.2. Pivot de Gauss

Définition 4.1.5. On appelle **opération élémentaire** sur un système d'équations linéaires :

- l'échange de deux lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$;
- la multiplication d'une ligne par un scalaire *non nul*, noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$ pour $\lambda \neq 0$;
- l'ajout d'une ligne multipliée par un scalaire quelconque à une autre, noté $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$.

Proposition 4.1.6. *Si l'on applique une succession d'opérations élémentaires à un système, on obtient un système équivalent.*

Remarque 4.1.7. Il est essentiel d'effectuer les opérations *dans l'ordre* et de ne pas appliquer deux opérations en même temps. Par exemple, considérons le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Appliquons *en même temps* (c'est interdit) l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = -3. \end{cases}$$

On remarque alors que $(-3, 0)$ est solution du deuxième système, alors qu'il n'est pas solution du premier. Les deux systèmes ne sont donc pas équivalents. Dans ce cas précis, il est évident que quelque chose ne va pas (les deux lignes du nouveau système sont proportionnelles) mais si l'on ne fait pas attention, des erreurs peuvent se produire sans que ça soit évident.

La méthode du pivot de Gauss est un algorithme consiste à appliquer des opérations élémentaires jusqu'à arriver à un système triangulaire. On peut schématiser l'algorithme de la façon suivante (voir le cours pour une démonstration en direct) :

1. Étape 1 :
   - Quitte à échanger des lignes, on peut supposer que le coefficient de x_1 est non-nul dans la première ligne.
   - On divise la première ligne par le coefficient de x_1 pour que ce coefficient devienne 1.
   - Pour chaque ligne L_i ($i \geq 2$), on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda_i L_1$ où λ_i est le coefficient de x_1 dans L_i.
   - La variable x_1 n'apparaît plus dans les lignes autres que la première.
2. Étape 2 : à partir de maintenant on ne touche plus à la première ligne. En considérant les lignes restantes, on récupère un système de $k - 1$ équations à $n - 1$ inconnues. On applique l'étape précédente pour se débarrasser de x_2 dans toutes les lignes sauf la deuxième.

3. Étapes suivantes : on continue à appliquer l'étape du début aux lignes suivantes, jusqu'à ce que toutes les lignes soient fixées et qu'on obtienne un système triangulaire.

4. Une fois arrivé à un système triangulaire, on peut simplement le résoudre par substitution, en partant de la dernière équation et en remontant.

Remarque 4.1.8. C'est en forgeant que l'on devient forgeron ; on ne peut pas se contenter de lire la description (très abstraite) ci-dessus et de regarder l'enseignant l'appliquer une fois ou deux au tableau. Il faut absolument s'entraîner à le faire soi-même. Quasiment tous les exercices d'algèbre linéaire se ramènent *in fine* à la résolution d'un système d'équations linéaires. La méthode du pivot de Gauss est très efficace et permet de résoudre les systèmes d'équations linéaires sans « bidouiller ».

4.2. L'espace $\mathbb{R}^n$

4.2.1. Définition

Définition 4.2.1. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on verra parfois les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des *points* et parfois comme des *vecteurs* (implicitement, $(x_1, \dots, x_n)$ représente le vecteur qui commence en l'origine et se termine en $(x_1, \dots, x_n)$). Par convention, on note les points par des lettres majuscules $A, B, C \dots$ et les vecteurs par des lettres minuscules $u, v, w \dots$ (sauf quand c'est le vecteur qui relie deux points comme dans l'exemple suivant). Il faudra faire attention dans les définitions suivantes : par exemple, additionner deux points n'a pas de sens, même si on peut formellement additionner deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.2.2. Soit $A(x_1, \dots, x_n)$ et $B(y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs. On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur de coordonnées $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Définition 4.2.3. Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs. On note leur somme $u + v$. C'est le vecteur de coordonnées $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Définition 4.2.4. Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur et $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalaire. On note αu le vecteur de coordonnées $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

4.2.2. Repères

Pour déterminer un point, on le représente généralement par ses coordonnées : $A(x_1, \dots, x_n)$. Ces coordonnées sont implicitement des coordonnées dans le repère canonique de $\mathbb{R}^n$, mais il existe d'autre repères !

Définition 4.2.5. Soit $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs. Une **combinaison linéaire** de $v_1, \dots, v_k$ est un vecteur qui s'écrit sous la forme $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des scalaires.

Définition 4.2.6. Une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ est dite **libre** ou **linéairement indépendante** si

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \vec{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

En d'autres termes, l'équation $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \vec{0}$ (que l'on peut représenter par un système linéaire) n'a qu'une seule solution : $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (0, \dots, 0)$. Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée** (ou **linéairement dépendante**).

Exemple 4.2.7. La famille composée de $u = (1,1)$, $v = (3,2)$ est libre. Ce n'est pas le cas de $u = (1,2)$, $v = (2,4)$.

Définition 4.2.8. Deux vecteurs u, v sont **colinéaires** s'il sont proportionnels, c.-à-d. s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha v$ ou s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $v = \beta u$.

Proposition 4.2.9. *Une famille de deux vecteurs* (u, v) *est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont* pas *colinéaires.*

Définition 4.2.10. Un **repère** de $\mathbb{R}^n$ est un $(n+1)$-uplet $\mathcal{R} = (O; v_1, \dots, v_n)$ où O est un point et $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre.

Proposition 4.2.11. *Soit M un point de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{R} = (O; v_1, \dots, v_n)$ un repère de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique famille de scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ tels que*

$$\overrightarrow{OM} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Définition 4.2.12. Les coefficients dans la proposition précédente s'appellent les **coordonnées** de M dans le repère.

Exemple 4.2.13. Le *repère canonique* de $\mathbb{R}^n$ est donnée par $\mathcal{R}_{\text{can}} = (O; e_1, \dots, e_n)$ où $O = (0, \dots, 0)$ et $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$. Les coordonnées de M dans ce repère sont ses coordonnées au sens habituel.

Un exercice courant est le changement de repère. Étant donné deux repères $\mathcal{R} = (O; v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{R}' = (O'; v'_1, \dots, v'_n)$, si l'on connaît les coordonnées d'un point dans le premier repère, comment trouver les coordonnées dans le deuxième repère ? Supposons par exemple que l'on connaisse les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de M dans le repère $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. On procède en deux étapes.

1. On commence par changer d'origine. Soit $\overrightarrow{OO'} = (k_1, \dots, k_n)$ Les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'' = (O'; v_1, \dots, v_n)$ sont données par :

$$\begin{cases} x''_1 = x_1 - k_1, \\ \dots \\ x''_n = x_n - k_k. \end{cases}$$

2. On change ensuite de base. Écrivons les coordonnées de v_i dans la base $(v'_1, \dots, v'_n)$ comme $v_i = a_{i,1}v'_1 + \cdots + a_{i,n}v'_n$. Alors les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ sont :
$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}x''_1 + \cdots + a_{1,n}x''_n, \\ \dots, \\ x'_n = a_{n,1}x''_1 + \cdots + a_{n,n}x''_n. \end{cases}$$

Remarque 4.2.14. Dans certains cas il est plus simple d'exprimer les coordonnées de v'_i dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ comme $v'_i = b_{i,1}v_1 + \cdots + b_{i,n}v_n$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} x''_1 = a_{1,1}x'_1 + \cdots + a_{1,n}x'_n, \\ \dots, \\ x''_n = a_{n,1}x'_1 + \cdots + a_{n,n}x'_n. \end{cases}$$

et on doit résoudre le système linéaire, avec comme inconnues les x'_i.

4.3. Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$

4.3.1. Droites du plan

Une droite est l'ensemble des points qui sont alignés avec deux points fixés. On peut la définir :

- par un point A et un vecteur directeur u (alors $(A; u)$ est un repère de la droite) ;
- par une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$;
- par une équation paramétrique du type
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$
où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Remarque 4.3.1. Aucune de ces écritures n'est unique. Une droite a une infinité de vecteurs directeurs, une infinité d'équations cartésiennes, etc.

Proposition 4.3.2. *Si la droite D passe par A et B elle admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.*

Proposition 4.3.3. *Soit D la droite passant par $A(x_0, y_0)$ de vecteur directeur $u(\alpha, \beta)$. Alors une équation paramétrique de D est donnée par $\{x = x_0 + \alpha t, y = y_0 + \beta t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Une équation cartésienne est donnée par $\beta x - \alpha y + (\alpha y_0 - \beta x_0) = 0$.*

Remarque 4.3.4 (Méthode). Pour retrouver l'équation cartésienne : si $\alpha \neq 0$, on a $x = x_0 + \alpha t \implies t = \frac{x - x_0}{\alpha}$ donc $y = y_0 + \beta t = y_0 + \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$ qu'on peut réécrire sous la forme ci-dessus.

Proposition 4.3.5. *Si D a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $n = (a, b)$ est un vecteur* ***normal*** *(«perpendiculaire») à D. La droite admet pour vecteur directeur $u = (-b, a)$.*

4.3.2. Plan dans l'espace

Un plan $P \subset \mathbb{R}^3$ peut être défini par :

- trois points non-alignés ;
- un point A et deux vecteurs (u, v) linéairement indépendants (appelés « base de la direction » de P) ;
- un point A et un vecteur normal $n \neq \vec{0}$;
- une équation cartésienne du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$;
- une équation paramétrique du type

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t, \\ y = y_0 + \beta_1 s + \beta_2 t, \quad s, t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 t, \end{cases}$$

  où $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants.

Remarque 4.3.6 (Méthode). Soit P le plan passant par $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ et $C(x_3, y_3, z_3)$. Alors :

- P admet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme base de la direction et passe par A ;
- on peut trouver un vecteur normal n en résolvant le système $\{\overrightarrow{AB} \cdot n = 0; \overrightarrow{AC} \cdot n = 0\}$;
- l'équation cartésienne est du type $ax + by + cz + d = 0$ où $n = (a, b, c)$ et on trouve d en remplaçant (x, y, z) par les coordonnées de A (par exemple).

4.3.3. Droites dans l'espace

Une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ peut être définie par :

- deux points distincts ;
- un point A et un vecteur directeur u ;

- un système de deux équations cartésiennes non proportionnelles :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

- une équation paramétrique du type

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Remarque 4.3.7 (Méthode 1 : paramétrique → cartésienne). Supposons que D est donnée par une équation paramétrique comme ci-dessus. Supposons que $\alpha \neq 0$ (sinon on le fait avec β ou γ). Alors $t = \frac{x-x_0}{\alpha}$, que l'on remplace dans les deux autres équations. On obtient ainsi un système de deux équations cartésiennes en (x, y, z).

Remarque 4.3.8 (Méthode 2 : cartésienne → paramétrique). Supposons que D est donnée par une équation cartésienne comme ci-dessus.

1. On trouve un vecteur directeur u en résolvant le système $\{u \cdot n = 0; u \cdot n' = 0\}$ où $n = (a, b, c)$ et $n' = (a', b', c')$.
2. On trouve un point de la droite $A(x_0, y_0, z_0)$ qui vérifie les deux équations, par exemple en posant $x = 0$ et en résolvant le système (si ça ne marche pas on essaie $y = 0$ puis $z = 0$).

4.3.4. Hyperplans

Définition 4.3.9. Un **hyperplan** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble défini par une équation cartésienne $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Exemple 4.3.10. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites, les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans.

4.4. Sous-espaces vectoriels : propriétés

4.4.1. Définition

Définition 4.4.1. Un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ qui :

- contient l'origine : $0 \in V$;

- est stable par **combinaison linéaire** : si $v_1, \dots, v_k \in V$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, alors $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in V$.

Remarque 4.4.2. La condition $0 \in V$ est essentielle !

Proposition 4.4.3. *Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;*
2. *$0 \in V$ et $\forall v, w \in V, v + w \in V$ et $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha v \in V$;*
3. *$0 \in V$ et $\forall v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha v + \beta w \in V$.*

Exemple 4.4.4. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites qui passent par l'origine. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, les droites qui passent par l'origine et les plans qui passent par l'origine.

4.4.2. Opérations

Proposition 4.4.5. *Si $V, W \subset \mathbb{R}^n$ sont deux sous-espaces vectoriels, alors leur intersection $V \cap W$ est encore un sous-espace vectoriel.*

Remarque 4.4.6. En général, si $V, W \subset \mathbb{R}^n$ sont deux sous-espaces vectoriels, leur union n'est pas un sous-espace vectoriel. C'est le cas uniquement si $V \subset W$ ou si $W \subset V$.

Proposition 4.4.7. *Si $V, W \subset \mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels, alors le sous-ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:*

$$V + W = \{u \in V \mid \exists v \in V, \exists w \in W \text{ t.q. } u = v + w\}.$$

*On l'appelle la **somme** de V et W. C'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $V \cup W$.*

Exemple 4.4.8. La somme de deux droites distinctes est un plan.

4.4.3. Sous-espace vectoriel engendré

Remarque 4.4.9. Dans ce qui suit, on va parler de *familles* d'éléments. Contrairement à un sous-ensemble, un même élément peut être répété plusieurs fois dans une famille. En général, on considère que les éléments d'une famille sont ordonnés, du premier au dernier.

Définition 4.4.10. Soit $S = (v_1, \dots, v_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit le **sous-espace vectoriel engendré par** S comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S :

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 4.4.11. Il est possible que S aie une infinité d'éléments. Dans ce cas, on ne considère que des combinaires linéaires *finies*, c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini de termes dans la somme.

Remarque 4.4.12. Si $S = \emptyset$ alors $\langle S \rangle = \{0\}$: on s'autorise la combinaison linéaire « vide ».

Proposition 4.4.13. *Soit S une famille de vecteurs $\mathbb{R}^n$. Alors $\langle S \rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient S.*

Définition 4.4.14. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. Une famille d'éléments $S \subset V$ est appelée **famille génératrice** de V si $\langle S \rangle = V$.

Remarque 4.4.15. Par définition, S est une famille génératrice de V si et seulement si tout élément de V peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de S. La famille S n'est pas unique en général.

Définition 4.4.16. Une famille $S = (v_1, \dots, v_k)$ est dite **libre** si :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $(v_1, \dots, v_k)$ sont **linéairement indépendants**. Dans le cas contraire, on dit que S est **liée** (ou que les vecteurs sont **linéairement dépendants**).

Remarque 4.4.17. En d'autres termes, la famille est libre si la seule manière d'obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire d'éléments de S est de prendre tous les coefficients nuls.

Définition 4.4.18. Une **base** d'un sous-espace vectoriel V est une famille $S \subset V$ qui est libre et génératrice.

Proposition 4.4.19. *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et S une famille d'éléments de V. Alors S est une base de V si et seulement si tout élément de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de S.*

Exemple 4.4.20. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille $(e_1, \dots, e_n)$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec le 1 en position i.

Théorème 4.4.21. *Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base. Toutes les bases d'un même sous-espace vectoriel ont le même élément.*

Définition 4.4.22. On appelle le nombre d'éléments d'une base de V la **dimension** de V, notée $\dim V$.

Exemple 4.4.23. La dimension d'une droite est 1, celle d'un plan est 2. La dimension de $\mathbb{R}^n$ est n.

Définition 4.4.24. Soit S une famille de vecteurs. On appelle **rang** de S et on note $\operatorname{rang} S$ la dimension de $\langle S \rangle$.

Proposition 4.4.25. *Soit $V, W \subset \mathbb{R}^n$ deux sous-espaces vectoriels. Si $V \subset W$ alors* $\dim V \leq \dim W$. *Dans ce cas, si* $\dim V = \dim W$ *alors* $V = W$.

Proposition 4.4.26. *Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension d. Soit S une famille d'éléments de V.*

- *Si S est libre alors S a au plus d éléments. Dans ce cas, si S a exactement d éléments, alors S est une base de V.*
- *Si S est génératrice alors S a au moins d éléments. Dans ce cas, si S a exactement d éléments, alors S est une base de V.*

Remarque 4.4.27 (Méthode). On a la méthode générale suivante pour trouver une base d'un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$:

1. On commence par trouver une famille génératrice $S = (v_1, \dots, v_k)$ de V. On pourra par exemple écrire V sous forme paramétrique.
2. On considère les vecteurs un par un.
   - Si $v_1 = 0$ on l'élimine, sinon on le garde.
   - Si on peut écrire v_2 comme combinaison linéaire de v_1 (c'est-à-dire que $v_2 = \lambda v_1$) on l'élimine, sinon on le garde.
   - Si on peut écrire v_3 comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 (c'est-à-dire que $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$) on l'élimine, sinon on le garde.
   - Si on peut écrire v_4 comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 on l'élimine, sinon on le garde.
   - Et ainsi de suite.

   Une fois arrivé au bout, la famille qu'on obtient est libre et reste génératrice. Le nombre de vecteurs qu'elle contient est la dimension de V.

5. Propriétés de $\mathbb{R}$

5.1. Corps ordonné

5.1.1. Relation d'ordre

Il existe une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$: si $a, b \in \mathbb{R}$, on peut les comparer, et on a soit $a < b$, soit $a = b$, soit $a > b$.

Proposition 5.1.1. *Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.*

Remarque 5.1.2. (Très utile) On a $a < b \iff 0 < b - a$.

Proposition 5.1.3. *Soit a, b, c des réels.*

- *Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.*
- *Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$.*

Remarque 5.1.4. Pour les quotients, on note que $x/c = x \cdot (1/c)$.

5.1.2. Valeur absolue

Définition 5.1.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est le nombre :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Remarque 5.1.6. Le nombre $|x - y|$ est la distance entre x et y sur la droite réelle.

Proposition 5.1.7. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x)$.*

Proposition 5.1.8. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $c \geq 0$ des nombres réels. Alors $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$.*

Théorème 5.1.9 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.*

Démonstration. On distingue plusieurs cas :

- Si $x, y \geq 0$, ou bien si $x, y \leq 0$, alors $|x + y| = x + y = |x| + |y|$;
- Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, on pose $z = -y \geq 0$. D'une part, $|x| + |y| = x + z$. D'autre part, $|x + y| = |x - z|$:
  - Soit $x \geq z$, alors $|x - z| = x - z \leq x \leq x + z$;
  - soit $x \leq z$, alors $|x - z| = z - x \leq z \leq z + x$. □

5.1.3. Intervalles

Définition 5.1.10. Soit $a \leq b$ deux nombres réels. On définit plusieurs types d'intervalles :

- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert) ;
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervalle semi-ouvert) ;
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervalle semi-ouvert) ;
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé).

On définit aussi les intervalles non-bornés $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, et $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Proposition 5.1.11 (Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$)**.** *Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout $x, y \in A$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $x < a < y$, alors $a \in A$.*

Remarque 5.1.12. Un intervalle peut être vide, ou un singleton.

Proposition 5.1.13. *L'intersection de deux intervalles est un intervalle.*

Remarque 5.1.14. L'union de deux intervalles n'est pas nécessairement un intervalle.

5.2. Bornes

5.2.1. Majorants, minorants

Définition 5.2.1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble.

- Un **majorant** de A est un élément $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A, a \leq M$.
- Un **minorant** de A est un élément $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A, a \geq m$.

Remarque 5.2.2. Les majorants/minorants n'existent pas forcément : par exemple, $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant, $\mathbb{Z}$ n'a pas de minorant. S'ils existent, ils ne sont pas uniques. Par exemple, si M est un majorant de A, alors $M + 1$ est aussi un majorant.

Définition 5.2.3. Une partie de $\mathbb{R}$ est **bornée** si elle admet un minorant et un majorant, c.à.d. si elle est incluse dans un intervalle du type $[m, M]$.

Définition 5.2.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Un **maximum** de A est un élément de A qui majore A. Un **minimum** de A est un élément de A qui minore A.

Proposition 5.2.5. *Si un maximum (ou un minimum) existe, alors il est unique.*

Démonstration. Supposons que M et M' soient deux maximums de A. Alors comme $M \in A$ et que M' est un majorant, on a $M' \geq M$. De même, comme $M' \in A$ et que M est un majorant, on a aussi $M \geq M'$. On en déduit $M = M'$. □

Définition 5.2.6. S'ils existent, on note $\max A$ le maximum de A et $\min A$ le minimum de A.

Exemple 5.2.7. $\max[0,1] = 1$, mais $[0,1[$ n'a pas de maximum.

5.2.2. Bornes supérieures et inférieures

Définition 5.2.8. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. La **borne supérieure** de A (si elle existe) est le plus petit majorant de A, notée $\sup A$. La **borne inférieure** de A (si elle existe) est le plus grand minorant de A, notée $\inf A$.

Exemple 5.2.9. $\sup[0,1[= 1$.

Proposition 5.2.10. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors M est la borne supérieure de A si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq M \iff x \text{ est un majorant de } A.$$

Théorème 5.2.11 (de la borne supérieure)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Si A admet au moins un majorant, alors la borne supérieure de A existe. De même, si A admet au moins un minorant, alors la borne inférieure de A existe.*

5.2.3. Partie entière

Définition 5.2.12. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **partie entière** de x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand nombre entier inférieur à x.

Démonstration. Montrons que la partie entière existe. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. On considère l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Par définition, la partie entière de x est le maximum de A s'il existe. Montrons qu'il existe. Cet ensemble est :

- majoré : par x ;
- non-vide : si $x \geq 0$, on a $0 \in A$; sinon, on utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien pour trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > -x$, et alors $n = -m \leq x$.

L'ensemble A admet donc une borne supérieure, que l'on note α.

Montrons que α appartient à A. Le nombre $\alpha - 1$ est strictement inférieur à $\alpha = \sup A$, donc ce n'est pas un majorant de A. Il existe donc un entier relatif

$n_0 \in A$ tel que $a - 1 < n_0 \iff a < n_0 + 1$. Alors on voit que n_0 est aussi un majorant de A. En effet, si $n \in A$, on a $n \leq a < n_0 + 1$ donc $n \leq n_0$ (il n'y a pas d'entier entre n_0 et $n_0 + 1$). Comme a est le plus petit majorant de A, on doit donc avoir $a \leq n_0$. Or comme $n_0 \in A$, on a aussi $n_0 \leq a$, d'où $a = n_0 \in A$. Le nombre a est donc un majorant de A qui appartient à A, c'est donc son maximum. □

Proposition 5.2.13. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $n = \lfloor x \rfloor \iff n \leq x < n + 1$.*

Exemple 5.2.14. $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2,12983 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, etc.

5.3. Voisinages et densité

Définition 5.3.1. Soit $V \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- V est un **voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si V contient un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus\{x_0\}$ pour un $\varepsilon > 0$;
- V est un **voisinage à droite** (resp. **à gauche**) de $x_0 \in \mathbb{R}$ si V contient un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ (resp $]x_0 - \varepsilon, x_0[$) pour un $\varepsilon > 0$;
- V est un **voisinage** de $+\infty$ (resp. $-\infty$)si V contient un intervalle du type $]A, +\infty[$ (resp $] - \infty, A[$) pour un $A > 0$.

Définition 5.3.2. On dit que $D \subset \mathbb{R}$ est **dense** si tout intervalle ouvert non-vide contient un élément de D.

Théorème 5.3.3. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.*

Lemme 5.3.4. *Le corps $\mathbb{R}$ est* ***archimédien*** *: pour tout $a > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel quel $n \geq a$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\mathbb{R}$ n'est pas archimédien, en d'autres termes que $\mathbb{N}$ est majoré. Alors $a = \sup \mathbb{N}$ existe. Mais alors $a - 1 < \sup \mathbb{N}$ donc $a - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$, donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n > a - 1$. On en déduit $n + 1 > a$, ce qui contredit le fait que a est un majorant de $\mathbb{N}$. □

Preuve de la densité de $\mathbb{Q}$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle, $a < b$. Pour simplifier on suppose $a > 0$ (on peut faire la démonstration sinon, quand même mais il faut faire attention aux signes). Posons $\varepsilon = b - a > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $n > 1/\varepsilon \iff \varepsilon > 1/n$. On pose alors $m = \lfloor na \rfloor$, i.e. $m \leq na < m + 1$. On trouve alors $a < (m + 1)/n < b$. □

6. Suites numériques

6.1. Suites et limites de suites

Définition 6.1.1. Une **suite** (numérique) est une famille de nombres réels indexées par les entiers naturels, notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$. Le nombre u_n est le $n$ième **terme** de la suite u.

Définition 6.1.2. Soit u et v deux suites et $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut définir la somme $u + v$ par $(u + v)_n = u_n + v_n$, le produit $(uv)_n = u_n v_n$ et le produit par un scalaire $(\alpha u)_n = \alpha u_n$.

Définition 6.1.3. Soit $u = (u_n)$ une suite et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim u_n = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon.$$

On dit que u est **convergente** si elle admet une limite (réelle). Dans le cas contraire on dit qu'elle est **divergente**.

Exemple 6.1.4. Une suite constante est convergente. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.

Proposition 6.1.5. *La limite d'une suite est unique.*

Démonstration. Supposons que $\lim u_n = l$ et que $\lim u_n = l'$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tq $\forall n \geq N_1, |u_n - l| < \varepsilon/2$, et il existe N_2 tq $\forall n \geq N_2, |u_n - l'| < \varepsilon/2$. Par l'inégalité triangulaire, on trouve que $\forall n \geq \max(N_1, N_2), |l - l'| < \varepsilon$. On en conclut que $\forall \varepsilon > 0, |l - l'| < \varepsilon$, d'où $l = l'$. $\square$

Définition 6.1.6. On dit que $\lim u_n = +\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On a une définition analogue de $\lim u_n = -\infty$.

Définition 6.1.7. Soit (u_n) une suite à valeurs complexes. On dit qu'elle **converge** vers $l \in \mathbb{C}$ si $\Re u$ converge vers $\Re l$ et $\Im u$ converge vers $\Im l$.

6.2. Opérations sur les limites

Proposition 6.2.1. *Les mêmes règles de calcul que pour les limites de fonctions s'appliquent pour calculer les limites de $u+v$, uv et u/v.*

Démonstration. Montrons par exemple que si $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = l'$ alors $\lim(u_n + v_n) = l + l'$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel, on cherche un rang N tel que

$$]\forall n \geq N,\ |u_n + v_n - (l + l')| < \varepsilon.$$

- Comme $\lim u_n = l$, on sait qu'il existe un rang N' tel que $\forall n \geq N'$, $|u_n - l| < \varepsilon/2$.
- Comme $\lim v_n = l'$, on sait qu'il existe un rang N'' tel que $\forall n \geq N''$, $|v_n - l'| < \varepsilon/2$.

En combinant ces deux résultats, on en déduit qu'à partir du rang $N \coloneqq \max(N', N'')$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|u_n + v_n - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Faisons également le cas du produit, les autres sont laissés en exercice. Supposons encore que $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = l'$. Grâce à la Proposition 6.3.2 (que l'on verra plus tard ; on n'a pas besoin de la proposition actuelle pour la démontrer), il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Alors :

- il existe un rang N' à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon/M$;
- il existe un rang N'' à partir duquel $|v_n - l'| < \varepsilon/l$.

Alors, à partir du rang $N \coloneqq \max(N', N'')$:

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ll'| &= |(u_n - l)v_n + (v_n - l')l| \\
&\leq |u_n - l| \cdot |v_n| + |v_n - l'| \cdot |l| \\
&< (\varepsilon/M) \cdot M + (\varepsilon/|l|) \cdot |l| \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 6.2.2. *Soit (u_n) une suite qui converge vers l, et soit f une fonction définie au voisinage de l telle que* $\lim_{x \to l} f(x) = L$. *Alors* $\lim f(u_n) = L$.

Proposition 6.2.3. *Soit u, v deux suites convergentes telles que $u_n \geq v_n$ pour tout n. Alors* $\lim u_n \geq \lim v_n$.

Remarque 6.2.4. Ce serait faux avec des inégalités strictes ! Par exemple, $1/n > 0$ mais $\lim 1/n = 0$.

Théorème 6.2.5 (Théorème des gendarmes)**.** *Soit u, v, w trois suites. Supposons que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n, et que $\lim u_n = \lim w_n = l$. Alors (v_n) converge aussi vers l.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$, et il existe N' tel que $\forall n \geq N', |w_n - l| < \varepsilon$. À partir du rang $\max(N, N')$, on trouve alors que :

$$l - \varepsilon < u_n \leq u_n + \underbrace{v_n - u_n}_{\geq 0} = v_n \leq v_n + \underbrace{w_n - v_n}_{\geq 0} = w_n < l + \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que $|v_n - l| < \varepsilon$. □

Théorème 6.2.6. *Soit u, v deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n.*

- *Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$;*
- *si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.*

6.3. Suites bornées

Définition 6.3.1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ (resp. **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n, m \leq u_n$). Elle est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

Proposition 6.3.2. *Si une suite converge, alors elle est bornée. Si $\lim u_n = +\infty$ alors u est minorée, si $\lim u_n = -\infty$ alors u est majorée.*

Définition 6.3.3. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \geq 0, u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$). Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 6.3.4. *Toute suite croissante majorée converge. (De même, toute suite décroissante minorée converge.)*

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Soit $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite. Comme la suite est majorée, l'ensemble A aussi. Il est clairement non vide, donc il admet une borne supérieure, $l = \sup A$. Montrons que $\lim u_n = l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc il existe un rang N tel que $l - \varepsilon < u_N$. Comme la suite est croissante, pour tout rang $n \geq N$, on en déduit que $u_n \geq u_N > l - \varepsilon$. Par ailleurs, l est un majorant de la suite, donc $u_n \leq l < l + \varepsilon$. On en conclut que $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \iff |u_n - l| < \varepsilon$, et ce pour tout rang $n \geq N$. □

Définition 6.3.5. Deux suites u, v sont dites **adjacentes** si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$;

- u est croissante et v est décroissante ;
- $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Proposition 6.3.6. *Soit u, v deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers la même limite.*

Théorème 6.3.7. *Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

6.4. Suites définies par récurrence

Proposition 6.4.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors il existe une unique suite $u = \{u_n\}$ telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.*

Exemple 6.4.2 (Suite arithmétique). Soit a, r deux réels. Il existe une unique suite telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + r$. On peut montrer que $u_n = a + rn$.

Exemple 6.4.3 (Suite géométrique). Soit a, r deux réels. Il existe une unique suite telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = ru_n$. On peut montrer que $u_n = ar^n$.

Exemple 6.4.4 (Somme d'une suite). Soit u une suite réelle. Il existe une unique suite s telle que $s_0 = u_0$ et $s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$. On note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$.

Proposition 6.4.5. *Si $u_n = a + nr$ est une suite arithmétique, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = na + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 6.4.6. *Si $u_n = ar^n$ est une suite géométrique, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Proposition 6.4.7. *Soit (u_n) une suite strictement positive. Supposons que $\lim u_{n+1}/u_n = \alpha \in \mathbb{R}$.*

- *Si $\alpha > 1$ alors $\lim u_n = +\infty$.*
- *Si $\alpha < 1$ alors $\lim u_n = 0$.*
- *Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire.*

Démonstration. Supposons que $\alpha > 1$ et posons $r = \frac{1+\alpha}{2} > 1$. Il existe donc un rang N à partir duquel $u_{n+1}/u_n > r$. On montre alors par récurrence que $u_n > r^{n-N} u_N$ pour $n > N$. Comme cette deuxième suite tend vers $+\infty$, on conclut.

Le cas $\alpha < 1$ est similaire. Posons $r = \alpha/2$. Il existe un rang N à partir duquel $u_{n+1}/u_n < r$, et on montre encore par récurrence que $u_n < r^{n-N} u_N$ pour $n > N$.

Pour le cas $\alpha = 1$, voici trois exemples qui montrent que tout peut arriver : la suite constante $u_n = l$ tend vers $l > 0$, la suite $u_n = n$ tend vers l'infini, la suite $u_n = 1/n$ tend vers 0. □

Proposition 6.4.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et u une suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors $f(l) = l$.*

Remarque 6.4.9. Il existe des cas où la suite u ne converge pas ! Mais *si* elle converge, *alors* sa limite est un point fixe de la suite.

6.5. Sous-suites

Définition 6.5.1. Soit $u = (u_n)$ une suite. Une **sous-suite** (ou **suite extraite**) est une suite obtenue en ne gardant qu'une partie (infinie) de valeurs de la suite. Formellement, c'est une suite (v_n) où $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Exemple 6.5.2. Soit (u_n) une suite. Alors (u_{2n}), (u_{n^2}), (u_{3n+2}) sont des sous-suites. Par contre $(u_{(-1)^n})$ n'est pas une sous-suite.

Proposition 6.5.3. *Une suite converge vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si toutes ses sous-suites convergent vers l.*

Démonstration. Traitons le cas $l \in \mathbb{R}$ (le cas $l = \pm\infty$ est presque identique).

Supposons $\lim u_n = l$ et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. On considère la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$. Soit $\varepsilon > 0$, alors on sait qu'à partir d'un certain rang N, on a $|u_n - l| < \varepsilon$. Comme φ est strictement croissante, elle est injective, donc son image est infinie, donc elle est non bornée. Donc il existe N' tel que $\varphi(N') \geq N$. Comme φ est croissante, pour $n \geq N'$, $\varphi(n) \geq N$. On en déduit que pour $n \geq N'$, $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$.

Réciproquement, si toute sous-suite de (u_n) converge vers l, alors en particulier $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l avec $\varphi(n) = n$. □

S'utilise de deux manières :

- si on sait qu'une suite converge, alors on peut en déduire la limite de ses sous-suites ;
- si on trouve deux sous-suites avec des limites différentes, alors la suite diverge.

Théorème 6.5.4 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée. Montrons que (u_n) admet une sous-suite monotone. On pourra conclure en utilisant le théorème des suites monotones.

On dit qu'un rang n est un « pic » de la suite si $\forall m > n, u_m < u_n$.

- Soit il y a une infinité de pics. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi(n)$ comme le $n$ième pic. C'est bien une fonction strictement croissante, et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ est strictement décroissante par définition des pics. On en déduit que $(u_{\varphi(n)})$ converge car décroissante et minorée.

- Soit il n'y a qu'un nombre fini de pics. On pose $\varphi(0)$ un nombre plus grand que tous les pics. Comme $\varphi(0)$ n'est pas un pic, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tq $u_{\varphi(1)} \geq u_{\varphi(0)}$. Le rang $\varphi(1)$ n'est lui-même pas un pic, il existe $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)} \geq u_{\varphi(1)}$. De proche en proche (*formellement : par récurrence*), on trouve une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n+1)} \geq u_{\varphi(n)}$, c.à.d. que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ est croissante Comme elle est majorée, elle converge. □

6.6. Comparaison asymptotique

On peut comparer le comportement « à l'infini » de suites.

Définition 6.6.1. Soit u et v deux suites. On dit que u est **négligeable** par rapport à v s'il existe une suite ε telle que $u_n = v_n \varepsilon_n$ et $\lim \varepsilon_n = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Proposition 6.6.2. *Soit u et v deux suites. Si v ne s'annule jamais, alors $u_n = o(v_n) \iff \lim u_n/v_n = 0$.*

Démonstration. On définit simplement $\varepsilon_n = u_n/v_n$. □

Proposition 6.6.3. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*

Exemple 6.6.4. La suite $u_n = n$ est négligeable par rapport à la suite $v_n = n^2$.

Définition 6.6.5. Soit u et v deux suites. On dit que u est **dominée** par v s'il existe une constante $C > 0$ telle que $u_n \leq Cv_n$ à partir d'un certain rang. On note alors $u_n = O(v_n)$.

Exemple 6.6.6. La suite $u_n = 100n$ est dominée par la suite $v_n = 50n + 4$.

Proposition 6.6.7. *Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$. La relation « être dominée » définit une relation d'ordre sur l'ensemble des suites réelles.*

Définition 6.6.8. Deux suites u, v sont **équivalentes** si $u_n - v_n = o(v_n)$. On note $u_n \sim v_n$.

Proposition 6.6.9. *Cette relation définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.*

Proposition 6.6.10. *Si v ne s'annule jamais, alors $u_n \sim v_n \iff \lim u_n/v_n = 1$.*

Démonstration. Supposons que $u_n - v_n = o(v_n)$. Alors $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$. On en déduit que $u_n/v_n = 1 + \varepsilon_n$ dont la limite est bien 1. Réciproquement, si $\lim u_n/v_n = 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n/v_n - 1$ et alors $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$. □

Remarque 6.6.11. Dans la pratique, c'est toujours comme ça que l'on vérifie que deux suites sont équivalentes.

Exemple 6.6.12. Les suites $u_n = 30n^2 + 18n + 5$ et $v_n = 30n^2 + 43n + 12$ sont équivalentes.

Proposition 6.6.13. *Soit u, v, u', v' quatre suites. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.*

Remarque 6.6.14. C'est complètement faux pour la somme !

Proposition 6.6.15 (Croissances comparées)**.** *On a les comparaisons suivantes, où $a > 0$ est un réel et $k \geq 0$ est un entier :*

$$\log n = o(n^k), \quad n^k = o(a^n).$$

Deuxième partie

Raisonnement Mathématique 1

7. Ensembles et applications

8. Démonstrations

9. Relations

9.1. Définition des relations

Définition 9.1.1. Soit X un ensemble. Une **relation** (binaire) sur X est un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset X \times X$. Si $(x,y) \in \mathcal{R}$, on dit que x et y sont en relation et on note $x\mathcal{R}y$.

Exemple 9.1.2. Soit X un ensemble quelconque. On a une relation sur X, la *relation d'égalité*, définie par :

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}.$$

On a alors $x\mathcal{R}y \iff x = y$. Il y a aussi la relation vide, où aucun couple d'éléments n'est en relation.

Exemple 9.1.3. On peut définir une relation sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}.$$

On a alors $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$. On peut aussi définir des relations pour $\geq, <, >$…Par la suite, on notera ces relations simplement par leur symbole $\leq, \geq$, etc.

Exemple 9.1.4. Soit n un entier. On peut définir une relation sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \mid x - y \text{ est divisible par } n\}.$$

Alors $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n}$.

Exemple 9.1.5. Soit $f : X \to X$ une fonction. On peut définir une relation sur X par :

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X \mid f(x) = y\}.$$

Alors $x\mathcal{R}y \iff f(x) = y$.

Comme on peut le voir, les relations peuvent être de types divers et variés.

9.2. Relations d'ordre

9.2.1. Définitions de base

Un type de relations intéressant est celui des relations d'ordre, qui nous dit comment « comparer » deux éléments.

Définition 9.2.1. Une **relation d'ordre** $\preceq$ sur un ensemble X est une relation qui vérifie les trois propriétés suivantes :

Réflexivité Pour tout $x \in X$, on a $x \preceq x$.

Antisymétrie Pour tout $x, y \in X$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $x = y$.

Transitivité Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $x \preceq z$.

Définition 9.2.2. Soit X un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre. On note aussi $x \prec y$ si $x \preceq y$ et $x \neq y$.

Exemple 9.2.3. Soit $X = \mathbb{R}$. La relation $\leq$ est une relation d'ordre :

- tout réel est inférieur ou égal à lui-même, $x \leq x$ (réflexivité);
- si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors clairement $x = y$ (antisymétrie);
- enfin si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors on a bien $x \leq z$ (transitivité).

Les relations d'ordre généralisent ces conditions «évidentes» sur $\mathbb{R}$.

Exemple 9.2.4. Soit X un ensemble quelconque. On peut définir une relation d'ordre sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$, en disant que A et B sont en relation si $A \subseteq B$:

- un ensemble est bien inclus dans lui-même (réflexivité);
- si A est inclus dans B et B est inclus dans A, alors $A = B$ (antisymétrie);
- si A est inclus dans B et B est inclus dans C, alors A est inclus dans C (transitivité).

Remarque 9.2.5. On voit sur cet exemple que, contrairement au cas de l'inégalité sur $\mathbb{R}$, tous les éléments ne sont pas forcément comparables!

Définition 9.2.6. Une relation d'ordre $\preceq$ sur X est dite **totale** si pour tout $x, y \in X$, on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Exemple 9.2.7. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut ordonner cet ensemble en posant :

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x).$$

Encore une fois, ce n'est pas une relation d'ordre total total.

Exemple 9.2.8. Soit X un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur X. On peut définir une relation d'ordre *lexicographique* sur $X \times X$:

$$(x, y) \prec (x', y') \iff (x \prec x' \vee (x = x' \wedge y \prec y')).$$

Si par exemple X est l'ensemble des lettres $\{a, b, c, \ldots, z\}$, alors l'ordre sur $X \times X$ est exactement l'ordre du dictionnaire.

Exemple 9.2.9. L'égalité définit une relation d'ordre.

9.2.2. Éléments particuliers

Dans toute cette section, on fixe un ensemble ordonnée $(X, \preceq)$.

Majorants, minorants

Définition 9.2.10. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble.

- Un **majorant** de A est un élément $M \in X$ tel que $\forall a \in A, a \preceq M$.
- Un **minorant** de A est un élément $m \in X$ tel que $\forall a \in A, a \succeq m$.

Remarque 9.2.11. Les majorants/minorants n'existent pas forcément : par exemple, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'a pas de majorant, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ n'a pas de minorant. S'ils existent, ils ne sont pas uniques. Par exemple, si M est un majorant de $A \subseteq \mathbb{R}$, alors $M + 1$ est aussi un majorant.

Définition 9.2.12. Une partie de X est **bornée** si elle admet un minorant et un majorant.

Définition 9.2.13. Soit $A \subset X$. Un **maximum** de A est un élément de A qui majore A. Un **minimum** de A est un élément de A qui minore A.

Proposition 9.2.14. *Si un maximum (ou un minimum) existe, alors il est unique.*

Démonstration. Supposons que M et M' soient deux maximums de A. Alors comme $M \in A$ et que M' est un majorant, on a $M' \succeq M$. De même, comme $M' \in A$ et que M est un majorant, on a aussi $M \succeq M'$. On en déduit $M = M'$ par antisymétrie. □

Définition 9.2.15. S'ils existent, on note $\max A$ le maximum de A et $\min A$ le minimum de A.

Exemple 9.2.16. Dans $\mathbb{R}$, $\max[0,1] = 1$, mais $[0,1[$ n'a pas de maximum.

9.2.3. Bornes supérieures et inférieures

Définition 9.2.17. Soit A une partie de X. La **borne supérieure** de A (si elle existe) est le plus petit majorant de A, notée $\sup A$. La **borne inférieure** de A (si elle existe) est le plus grand minorant de A, notée $\inf A$.

Exemple 9.2.18. Dans $\mathbb{R}$, $\sup[0,1[= 1$.

Proposition 9.2.19. *Soit $A \subseteq X$ et $M \in X$. Alors M est la borne supérieure de A si et seulement si :*

$$\forall x \in A, x \succeq M \iff x \text{ est un majorant de } A.$$

On se place maintenant dans le cadre $(X, \preceq) = (\mathbb{R}, \leq)$.

Proposition 9.2.20. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. Alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *M est un majorant de A ;*
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ *t.q.* $x > M - \varepsilon$.

9.2.4. Relations d'équivalence

Nous allons maintenant étudier un autre type de relations intéressant.

Définition

Définition 9.2.21. Soit X un ensemble et $\sim$ une relation sur X. On dit que $\sim$ est une **relation d'équivalence** si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

Réflexivité Pour tout $x \in X$, $x \sim x$.

Symétrie Pour tout $x, y \in X$, si $x \sim y$ alors $y \sim x$.

Transitivité Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

Exemple 9.2.22. Soit X un ensemble quelconque. La relation d'égalité est une relation d'équivalence.

Exemple 9.2.23. Soit X l'ensemble des droites du plan. Alors la relation « D est parallèle à D' » est une relation d'équivalence.

Exemple 9.2.24. Soit $X = \mathbb{Z}$ et n un entier fixé. La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.

Exemple 9.2.25. Soit $f : X \to Y$ une fonction entre deux ensembles quelconques. La relation $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ définit une relation d'équivalence sur X.

Classes d'équivalence

Définition 9.2.26. Soit $(X, \sim)$ un ensemble muni d'une classe d'équivalence. Pour un élément $x \in X$, on définit la **classe d'équivalence** de x par :

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Proposition 9.2.27. *Soit $(X, \sim)$ un ensemble muni d'une classe d'équivalence. Alors pour tout $x, y \in X$, on a $x \sim y \iff [x] = [y]$.*

Exemple 9.2.28. Pour $(X, =)$, les classes d'équivalences sont les singletons.

Exemple 9.2.29. Pour la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$, la classe d'équivalence d'un entier x est l'ensemble des entiers y tels que $x - y$ est divisible par n.

Exemple 9.2.30. Soit $f : X \to Y$ et $\sim$ la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Alors $[x] = f^{-1}(\{f(x)\})$.

Proposition 9.2.31. *Soit $(X, \sim)$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une* partition *de X : tout élément de X appartient à une unique classe d'équivalence.*

Ensemble quotient

Définition 9.2.32. Soit $(X, \sim)$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence. On définit son **ensemble quotient** $X/\sim$ comme l'ensemble de ses classes d'équivalences.

Proposition 9.2.33. *Il existe une application surjective* $X \to X/\sim$ *donnée par* $x \mapsto [x]$.