[RM2] Rattrapage du jeudi 23 mai 2024

L'usage de documents ou de matériel électronique est strictement interdit. ***Toute réponse donnée doit être justifiée*** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Durée de l'épreuve : 1h30.*

Exercice 1 .... 4 points

(a) (2 points) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution: Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de bornes $a < b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit ξ une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \xi$.

(b) (2 points) Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty.$$

Démontrer que f s'annule en au moins un point.

Solution: On ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires directement : l'intervalle de définition n'est pas fermé, le théorème ne fait aucune mention des limites de la fonction. . .On peut néanmoins appliquer la définition de limite infinie d'une fonction avec $A = 0$ pour en déduire que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in]0, 1[, |x - 0| < \epsilon \implies f(x) < 0; \tag{1}$$
$$\exists \epsilon' > 0, \forall x \in]0, 1[, |x - 1| < \epsilon \implies f(x) > 0; \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

En particulier, si on considère $a = \epsilon/2$ et $b = 1 - \epsilon'/2$, on trouve que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On peut maintenant appliquer le théorème à la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a, b]$: la restriction de la fonction reste continue, et 0 est bien compris entre les valeurs de f aux bornes de l'intervalle. On en déduit qu'il existe $c \in [a, b] \subset]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 2 .... 6 points

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

(a) (1,5 points) Démontrer que l'adhérence de la réunion $A \cup B$ est égale à la réunion des adhérences de A et de B, c'est-à-dire que :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Solution: Il s'agit de démontrer une égalité d'ensembles, donc nous allons procéder par double inclusion.

- L'ensemble $\overline{A \subset B}$ est fermé, et il contient $A \cup B$ qui contient A. Comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A, on en déduit que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De manière symétrique, on démontre que $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. En combinant ces deux inclusions, on en déduit que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
- Réciproquement, l'ensemble $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé car c'est la réunion d'un nombre fini de fermés. De plus, il contient A et B, donc il contient $A \cup B$. On en déduit donc que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) (1,5 points) Est-ce que l'énoncé analogue est vrai pour l'intérieur ? C'est-à-dire, est-ce que l'intérieur de $A \cup B$ est toujours égal à $\mathring{A} \cup \mathring{B}$? Si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple.

Solution: Non, c'est faux. Soit $A =]0, 1[$ et $B = [1, 2[$. Alors $\mathring{A} =]0, 1[$ et $\mathring{B} =]1, 2[$, donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0, 1[\cup]1, 2[$. En revanche, $A \cup B =]0, 2]$ dont l'intérieur est $]0, 2[$. On n'a donc pas égalité entre ces deux ensembles : le point 1 n'appartient pas au premier mais il appartient au deuxième.

(c) (1,5 points) Est-ce que l'énoncé analogue est vrai pour le bord ? C'est-à-dire, est-ce que le bord de $A \cup B$ est toujours égal à $\partial A \cup \partial B$? Si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple.

Solution: Non, c'est faux. En gardant les mêmes A, B que précédemment, on trouve $\partial A \cup \partial B = \{0, 1, 2\}$ alors que $\partial(A \cup B) = \{0, 2\}$.

(d) (1,5 points) Donner un exemple de sous-ensembles A, B tels que A est ouvert, $A \cup B$ est ouvert, mais B n'est pas ouvert.

Solution: On peut encore reprendre le même contre-exemple.

Exercice 3 .... 3 points

On se propose de démontrer que la fonction suivante est continue en $a = 2$:

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

(a) (0,5 points) Démontrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - f(y) = \frac{(x-y)(x+y)}{x^2y^2}.$$

Solution: Le sujet comporte une faute de frappe. Toute mes excuses ! Heureusement, elle est mineur et ne change rien à la suite de l'exercice.
Il suffit de mettre les fractions au même dénominateur et de factoriser le numérateur :

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} = \frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}$$

(b) (1,5 points) Démontrer que si $|x - 2| < 1$, alors on a l'inégalité :

$$\left|\frac{x+2}{x^2}\right| < 3.$$

Solution: Supposons que $|x - 2| < 1$. Alors $1 < x < 3$, donc en particulier, $x + 2$ est positif. L'inégalité demandée devient donc :

$$\frac{x+2}{x^2} < 3 \iff x + 2 < 3x^2 \iff 0 < 3x^2 - x - 2.$$

Or $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$ (on peut noter que 1 est une racine assez évidente, sinon on calcule les racines par la méthode habituelle). Quand $x > 1$, chacun des deux termes du produit est strictement positif, donc on a bien $3x^2 - x - 2 > 0$.

(c) (2 points) En utilisant la définition avec des ϵ-δ, démontrer que $\lim_{x\to 2} f(x) = 1/4$.

Solution: Notons que $f(x) = 1/4$. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si $|x - 2| < \delta$ alors $|f(x) - f(2)| < \epsilon$. D'après la première question, on a :

$$f(x) - f(2) = \frac{(2-x)(x+2)}{2x^2} = \frac{x+2}{2x^2}(2-x).$$

D'après la deuxième question, si $|x - 2| < 1$, alors $\frac{x+2}{2x^2} < \frac{3}{2}$. On pose donc :

$$\delta = \min(1, \frac{2\epsilon}{3}).$$

Alors si $|x-2| < \delta$, en particulier $|x-2| < 1$ donc $\frac{x+2}{2x^2} < \frac{3}{2}$. On en déduit que :

$$|f(x) - f(2)| = \frac{x+2}{2x^2}|x-2| < \frac{3}{2}\delta \leq \epsilon.$$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 4 . . . .

Déterminer (en justifiant) les limites suivantes, si elles existent. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des fonctions usuelles vues en cours, et le fait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(a) (1,5 points) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}}$.

(b) (1,5 points) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

Solution:

(a) Par opérations sur les limites et continuité de la fonction racine carrée,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}} = \frac{0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 0.$$

(b) Pour $x > 0$, on a :

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sqrt{x}.$$

Par opérations sur les limites, en se servant de la limite connue de $\sin(x)/x$ en 0 et de la continuité de la fonction racine carrée, on trouve que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Exercice 5 . . . .

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont compacts ? (Justifier.)

(a) (1 point) $A = [0,1]$.

(b) (1 point) $B = \mathbb{R}$.

(c) (1 point) $C = \mathbb{R}^*$.

Solution: L'ensemble A est compact car il est fermé et borné. Les ensembles B et C ne sont pas bornés et ne sont donc pas compacts.