RM2 : Examen du 2 mars 2024

L'usage de documents ou de matériel électronique est strictement interdit. ***Toute réponse donnée doit être justifiée*** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Durée de l'épreuve : 1h30.*

Exercice 1 . . . . 4 points

(a) (2 points) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) (2 points) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2 . . . . 4 points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On définit un ensemble A_n par :

$$A_n = \left]1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right].$$

(a) (1 point) L'ensemble A_n est-il ouvert ? L'ensemble A_n est-il fermé ? Justifier vos réponses.

(b) (1 point) Déterminer l'adhérence, l'intérieur et le bord de A_n pour n fixé. Justifier vos réponses.

(c) (1 point) Déterminer (en justifiant) l'intersection $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

(d) (1 point) Déterminer (en justifiant) l'union $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Exercice 3 . . . . 4 points

On se propose de démontrer que la fonction suivante est continue en $a = 3$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - x,$$

(a) (1 point) Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - f(y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1).$$

(b) (1,5 points) On pose $a = 3$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x - a| < 1$, alors on a $|x^2 + ax + a^2 - 1| < 38$.

(c) (1,5 points) En utilisant la définition de la continuité (avec ϵ-δ), démontrer que f est continue en $a = 3$.

Exercice 4 . . . . 4 points

Déterminer (en justifiant) les limites suivantes, si elles existent. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des fonctions usuelles vues en cours, et le fait que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(a) (1 point) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3}$.

(b) (1 point) $\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(c) (1 point) $\lim_{x \to 0, x > 0} \ln(\sin(x)) - \ln(x)$.

(d) (1 point) $\lim_{x \to 0, x > 0} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

Exercice 5 . . . . 4 points

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme suit, où $E(x)$ désigne la partie entière de x :

$$f(x) = xE(x) = x\lfloor x \rfloor.$$

(a) (2 points) Déterminer si f admet une limite à droite et/ou à gauche en $a = 0$ et en $b = 1$, et si oui, les calculer.

(b) (2 points) Déterminer si f admet une limite en $a = 0$ et en $b = 1$, et si oui, les calculer.