Épreuve de contrôle continu n°1 – Corrigé

Sujet A

MARDI 6 JANVIER 2024

DURÉE : 45 MINUTES

- **Documents, calculettes et échanges par moyens électroniques sont strictement prohibés.**
- **Une attention particulière sera portée à la rigueur du raisonnement et à la qualité de la rédaction.**

Exercice 1. (Question de cours) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note B l'ensemble des points adhérents à A. Montrer que B est un fermé.

Solution. On rappelle que :

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Il s'agit de démontrer que B est fermé, ou en d'autres termes que $\mathbb{R} \setminus B$ est ouvert. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus B$; nous voulons donc démontrer que $\mathbb{R} \setminus B$ est un voisinage de x, ou encore qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$. Or, $x \notin B$, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \varnothing$. Mais alors $B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ et nous avons bien démontré que $\mathbb{R} \setminus B$ est un voisinage de x. □

Exercice 2. Pour chacune des parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer **en le justifiant** si A est ouverte, fermée et en calculer l'adhérence, l'intérieur et la frontière, lorsque A vaut :

a) $\mathbb{N}$ b) $\left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ c) $]-3,1]$ d) $]-\infty,0] \cap \mathbb{Q}$.

Solution.

a) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas ouvert car il n'existe pas de boule ouverte centrée en un point de $\mathbb{N}$ qui soit incluse dans $\mathbb{N}$. En effet, si $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, alors $B(n,r)$ est un intervalle non vide et non réduit à un singleton, donc il contient au moins un irrationnel (et a fortiori un nombre qui n'est pas un entier naturel). [1] On en déduit en particulier que $\mathbb{N}$ n'est un voisinage d'aucun de ses points et que $\mathring{\mathbb{N}} = \varnothing$.

En revanche, $\mathbb{N}$ est fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} =]-\infty,0[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[.$$

On en déduit que $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, et enfin que $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

b) Comme $A \subseteq \mathbb{Q}$, par le même raisonnement qu'à la question précédente, A n'est pas ouvert et $\mathring{A} = \varnothing$. Il est en revanche fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]1/2^{n+1}, 1/2^n[.$$

On a donc $\bar{A} = A = \partial A$.

1. On peut aussi démontrer que $\mathring{\mathbb{N}} = \varnothing$ en notant que c'est un ouvert contenu dans $\mathbb{Q}$, et qu'on a démontré en cours que $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$.

c) L'ensemble A n'est ni ouvert, ni fermé. En effet, A n'est pas un voisinage de 1, car toute boule de la forme $B(1,r)$ (avec $r>0$) contient un réel $x>1$, par exemple $x=1+r/2$. De plus, $\mathbb{R}\setminus A =]-\infty,-3]\cup]1,+\infty[$ n'est pas un voisinage de -3, car toute boule de la forme $B(-3,r)$ (avec $r>0$) contient un réel $x\in A$, par exemple $x=-3+\min(r,1)/2$.

Les raisonnements précédents démontrent que $1\notin \mathring{A}$ et $-3\in\bar{A}$. On en déduit que :

— On a $\mathring{A}\subseteq]-3,1[$. Or, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, et $]-3,1[$ est un ouvert contenu dans A, donc $\mathring{A} =]-3,1[$.

— On a $\bar{A}\supseteq [-3,1]$. Or, $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A, et $[-3,1]$ est un fermé contenant A, donc $\bar{A}=[-3,1]$.

Enfin, on trouve que $\partial A = [-3,1]\setminus]-3,1[= \{-3,1\}$.

d) Par le même raisonnement qu'aux deux premières questions, A n'est pas ouvert et $\mathring{A}=\varnothing$.

De plus, A n'est pas fermé. En effet, tous les réels négatifs sont adhérents à A, y compris les irrationnels ; étant donné $x\leqslant 0$, les approximations décimales de x définissent une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim u_n = x$. En particulier, on a $\bar{A}\supseteq]-\infty,0]$. Or, $]-\infty,0]$ est un fermé contenant A, donc $\bar{A}\subseteq]-\infty,0]$ et on a finalement l'égalité $\bar{A} =]-\infty,0]$. On en déduit donc que $\partial A =]-\infty,0]$. □

Exercice 3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $A_n =]-2+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}[$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer l'ensemble $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer l'ensemble $B=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.

Solution. 1. L'ensemble A_n est ouvert mais pas fermé (voir le cours pour une démonstration).

2. Comme chacun des A_n est ouvert, leur réunion A est ouvert (théorème du cours). On ne sait en revanche pas a priori si A est fermé ou pas. Pour le savoir, il faut déterminer l'ensemble A. Démontrons que $A =]-2,2[$.

— D'une part, on a que chaque A_n est contenu dans $]-2,2[$, donc $A\subseteq]-2,2[$.

— D'autre part, soit $x\in]-2,2[$. Comme $\lim -2+1/n = -2$ et $\lim 2-1/n = 2$, il existe[2] un rang N à partir duquel, si $n\geqslant N$, alors $-2+1/n < x < 2-1/n$. En particulier, on a $x\in A_N$ et donc $x\in A$.

On en déduit que $A =]-2,2[$, qui n'est pas fermé (cf. cours) mais qui est effectivement ouvert.

3. La suite (A_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $A_n\subseteq A_{n+1}$. On en déduit que leur intersection B est égale à A_1, c'est-à-dire $B =]-1,1[$. Cet ensemble est ouvert mais n'est pas fermé.

□

2. On peut exprimer N explicitement à l'aide de la fonction « partie entière ».