TD 5 : Formes normales

Exercice 1. Faire le lien entre la multiplication par l'une des matrices qui suivent avec les opérations élémentaires :

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&a&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&b&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

a) $L_1 \leftrightarrow L_2$

b) $L_1 \leftarrow L_1 + \alpha L_2$

c) $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$

d) $L_1 \leftarrow L_2, L_2 \leftarrow L_3$, et $L_3 \leftarrow L_1$

e) $L_1 \leftarrow L_1 + \alpha L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \beta L_2$

f) $L_3 \leftarrow L_3 + \alpha L_1 + \beta L_2$

g) $C_1 \leftrightarrow C_2$

h) $C_1 \leftarrow C_1 + \alpha C_2$

i) $C_2 \leftarrow C_2 + \alpha C_1$

j) $C_1 \leftarrow C_2, C_2 \leftarrow C_3$, et $C_3 \leftarrow C_1$

k) $C_1 \leftarrow C_1 + \alpha C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 + \beta C_2$

l) $C_3 \leftarrow C_3 + \alpha C_1 + \beta C_2$

Exercice 2. À quelle matrice correspond l'opération $C_i \leftarrow \sum_{j=1}^n a_j C_j$? L'opération $L_i \leftarrow \sum_{j=1}^n a_j L_j$?

Exercice 3.

a) Est-ce que l'ensemble des matrices inversibles à coefficients entiers forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

b) Calculer le produit $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ et en déduire que si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, alors l'inverse de $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est à coefficients entiers si et seulement si $ad - bc = \pm 1$.

c) En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = \pm 1 \}$.

d) Vérifier que les matrices du premier exercice sont unimodulaires (de déterminant ± 1).

Exercice 4. À l'aide d'opérations élémentaires, sur les lignes et les colonnes, déterminer les formes normales de Smith des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix}1&2&2\\-3&3&6\\5&-2&-8\end{pmatrix}$

Exercice 5. Soit $A = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \leq \mathbb{Z}^p$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^p$ engendré par une famille $(v_1, \dots, v_r)$ de vecteurs (colonnes) $v_i \in \mathbb{Z}^p$. Pour déterminer une base de A, il suffit de considérer la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{Z})$ dont les colonnes sont les v_i, d'échelonner cette matrice **en effectuant des opérations sur les colonnes uniquement** et de garder les colonnes non nulles. Appliquer cette procédure aux deux sous-groupes suivants :

a) Le sous-groupe $A_1 \leq \mathbb{Z}^3$ engendré par $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (4, 3, -1)$, $v_3 = (0, 9, 3)$, et $v_4 = (3, 12, 3)$.

b) Le sous-groupe $A_2 \leq \mathbb{Z}^4$ engendré par $w_1 = (9, 1, 4, 7)$, $w_2 = (6, 2, 5, 8)$ et $w_3 = (12, 4, 8, 10)$.

Exercice 6. Soit $A = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \leq \mathbb{Z}^p$ et M comme dans l'exercice précédent. Pour obtenir la structure de groupe abélien de $\mathbb{Z}^p/A$, il suffit de : (i) calculer la forme normale de Smith $UMV = D$ de la matrice M ; (ii) les coefficients diagonaux de D sont notés $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$, où $s = \min(r, p)$; (iii) le quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s}$ (avec $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = 0$ et $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$).

Reprendre les sous-groupes A_1 et A_2 de l'exercice précédent et déterminer la structure des quotients.

Exercice 7. Soit $A = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \leq \mathbb{Z}^p$ et M comme dans l'exercice précédent. On dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{Z}^p$ est une *base adaptée à* A si A est engendrée par la famille $(d_1 e_1, \ldots, d_p e_p)$ où les d_i sont les facteurs invariants (on omet $d_i e_i$ si $d_i = 0$, et on note $d_i = 0$ si $i > r$).

On en détermine une de la façon suivante : (i) on calcule la forme normale de Smith $UMV = D$; (ii) la matrice $U \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{Z})$ représente les opérations effectuées sur les lignes, que l'on garde en mémoire ; (iii) les colonnes de U^{-1} forment alors une base de $\mathbb{Z}^p$ adaptée à A.

Reprendre les sous-groupes A_1 et A_2 de l'exercice précédent et déterminer une base adaptée de $\mathbb{Z}^p$ dans chacun des cas.

Exercice 8. Déterminer tous les groupes abéliens (à isomorphisme près) d'ordre 72.