

Interrogation écrite 1

M1 MIC – Algèbre – 10/10/2023

L'utilisation de documents ou de matériel électronique est interdite. Toute réponse donnée devra être justifiée, en citant les résultats du cours utilisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont indépendants. Lisez tout le sujet avant de commencer. Durée de l'épreuve : 1h30.

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation diophantienne $213x + 39y = 6$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

- À l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, déterminer le PGCD $d = 213 \wedge 39$ et un couple d'entiers (x_0, y_0) tel que $213x_0 + 39y_0 = d$.
- Résoudre l'équation $213x + 39y = 6$.

Exercice 2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercice 3. On rappelle que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont inversibles pour la multiplication modulo n .

- Calculer le cardinal de $(\mathbb{Z}/70\mathbb{Z})^\times$.
- Le groupe $(\mathbb{Z}/70\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?

Étant donné $a \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$, on note $S(a) = \{x \in \mathbb{Z}/70\mathbb{Z} \mid x^5 = a\}$.

- Calculer le cardinal de $S(a)$ quand $a \in (\mathbb{Z}/70\mathbb{Z})^\times$.
- Calculer le cardinal de $S(a)$ quand $a = 2$.

Exercice 4.

- Le nombre 277 est-il premier ?
- Est-ce que 76 est un carré modulo 277 ? (On citera les théorèmes utilisés.)

Exercice 5. Soit A un anneau et $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal. Démontrer que \mathfrak{m} est premier.