Contrôle Continu 4

Raisonnement Mathématique II (RM2) – L1 MIASHS – lundi 14 février 2022

Durée : 1h30. Tout document ou matériel électronique est interdit. Lisez tout le sujet avant de commencer et justifiez toutes vos réponses. Une réponse donnée sans justification n'obtiendra pas de points.

Exercice 1. Question de cours

1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, $x_0 \in \bar{A}$ un élément adhérent, et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une application. Écrire la définition de « $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 ».

$$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in A, \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < m.$$

Remarque : on peut aussi écrire « $\forall m < 0$ ».

2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, où $a < b \in \mathbb{R}$, et soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \xi$.

Exercice 2. Adhérence, intérieur et bord

Pour chacun des sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ suivants, déterminer (en justifiant) si A est ouvert et/ou fermé, puis déterminer son adhérence, son intérieur et son bord :

1. $A = [-\pi, 1]$.

A n'est pas ouvert car ce n'est pas un voisinage de $-\pi$ ni de 1. Il est fermé car son complémentaire

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, -\pi[\cup]1, +\infty[$$

Est la réunion de deux intervalles ouverts et est donc ouvert. Comme il est fermé, $\bar{A} = A$. Son intérieur est $A^\circ =]-\pi, 1[$ et son bord est $\partial A = \{-\pi, 1\}$.

2. $A =]1, 2[\cup \{3\}$.

A n'est pas ouvert car ce n'est pas un voisinage de 3. Il n'est pas non plus fermé car son complémentaire

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 1] \cup [2, 3[\cup]3, +\infty[$$

N'est pas ouvert : ce n'est pas un voisinage de 1 ni de 2. Son adhérence est $\bar{A} = [1, 2] \cup \{3\}$, son intérieur est $A^\circ =]1, 2[$ et son bord est $\partial A = \{1, 2, 3\}$.

3. $A = \left\{1 + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n > 0\right\}$.

Commençons par noter que :

$$A = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}.$$

Cet ensemble n'est pas ouvert car ce n'est pas un voisinage de 2.

Il n'est pas non plus fermé car son complémentaire n'est pas un voisinage de $1 \in \mathbb{R} \setminus A$. On peut le justifier de deux manières : on peut dire que $(u_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\lim u_n = 1$ et donc que A n'est pas séquentiellement fermé ; ou bien, en reprenant la définition avec ϵ, on peut dire que quel que soit $\epsilon > 0$, la boule de centre 1 et de rayon ϵ intersecte A, car en choisissant $N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1$, on trouve $1 + \frac{1}{N} \in B(1, \epsilon)$.

L'intérieur de A est vide, $A^\circ = \emptyset$: il n'est voisinage d'aucun de ses points. Comme en TD, on trouve que le seul point adhérent à A et qui n'est pas dans A est 1, c'est-à-dire :

$$\bar{A} = A \cup \{1\}.$$

On en déduit que $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A}$.

Exercice 3. Ouvert ? Fermé ?

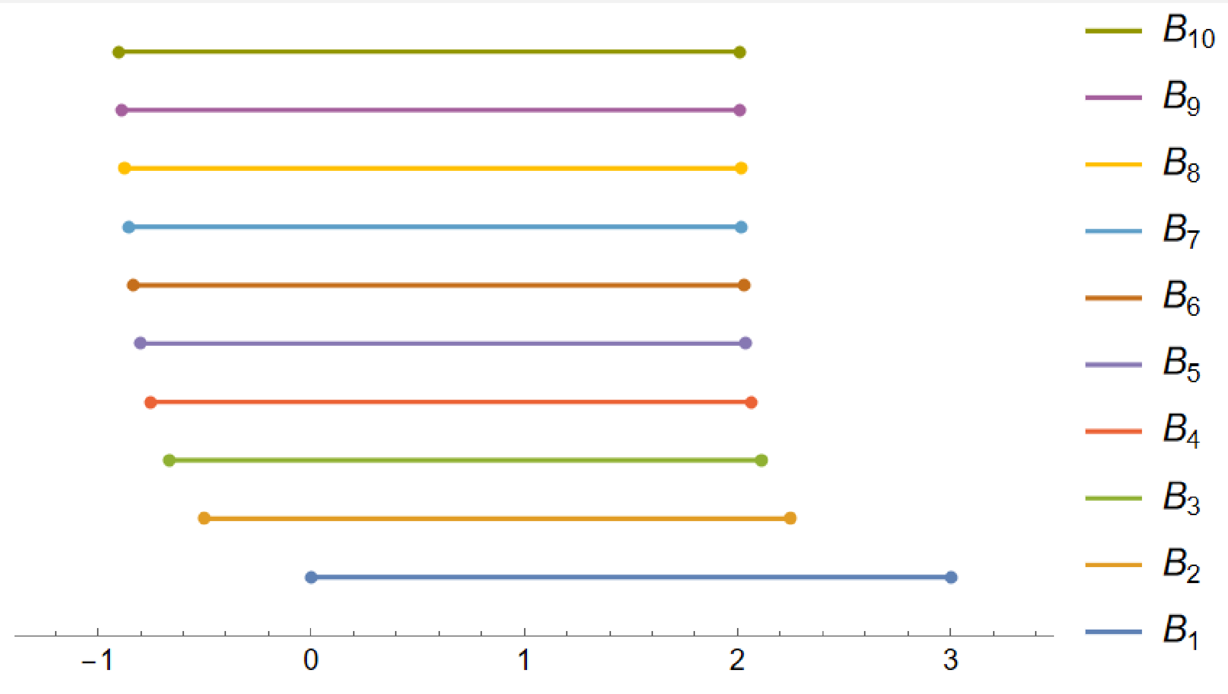
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul, on note :

$$B_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2}\right].$$

On note $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ la réunion de tous les B_n. Est-ce que C est fermé ? Est-ce que C est ouvert ?

Attention ! Les B_n ne sont pas ouverts, donc on ne peut rien conclure sur le fait que C est ouvert ou pas. Ils sont fermés, mais une union infinie de fermés n'est pas forcément fermée.

Commençons par illustrer l'exercice :



En s'aidant de ce dessin, on pense que $C =]-1, 3]$, ce que l'on va démontrer par double inclusion.

Tout d'abord, montrons que $C \subset]-1, 3]$. Si $x \in C$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$x \in B_n \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 2 + \frac{1}{n^2}.$$

En particulier, $x > -1$ car $\frac{1}{n} > 0$ et $x \leq 3$ car $\frac{1}{n^2} \leq 1$, donc on a bien $x \in]-1, 3]$.

Réciproquement, si $x \in]-1, 3]$, alors on cherche n tel que $x \in B_n$. Encore en s'aidant du dessin, on voit qu'il y a deux cas. Tout d'abord, si $0 \leq x \leq 3$ alors on a évidemment $x \in B_1$ donc $x \in C$. Cependant, si $x \in]-1, 0[$, on doit procéder différemment. Posons la distance entre x et -1 :

$$\begin{aligned} \epsilon &= |x - (-1)| \\ &= x + 1 > 0 \text{ (car } x > -1). \end{aligned}$$

Il existe un entier N tel que $N > \frac{1}{\epsilon}$ (par exemple, $N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1$). Pour cet entier N, on a :

$$N > \frac{1}{x+1} \Longrightarrow x + 1 > \frac{1}{N} \Longrightarrow x > -1 + \frac{1}{N}.$$

De plus comme on a supposé que $x < 0$, on a bien $x < 2 < 2 + \frac{1}{N^2}$. En conclusion, on a donc bien $x \in B_N \subset C$.

Comme on sait désormais que $C =]-1, 3]$, on en déduit facilement qu'il n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 4. Recherche de limite

On pourra utiliser le fait que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ sans démonstration (vu en cours).

Pour chacune de ces fonctions, déterminer si les limites en $x \to 0$ et $x \to +\infty$ existent. Les calculer le cas échant.

$$f_1(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f_2(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x}.$$

On a l'encadrement $|f_1(x)| \leq x^2$ donc $\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0$ par le théorème des gendarmes. En $x \to +\infty$, si on pose $X = \frac{1}{x} \to 0^+$, on obtient l'expression $\frac{\sin(X)}{X^2}$. Comme $\frac{\sin(X)}{X} \xrightarrow[X \to 0]{} 1$ et $\frac{1}{X} \xrightarrow[X \to 0^+]{} +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

Quand $x \to 0$, l'expression $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite (la limite à gauche est différente de la limite à droite !). Or, $f_2(x)$ avait une limite l en $x \to 0$, on aurait que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} (f_2(x) - x) = l$, ce qui est absurde. Donc $f_2(x)$ n'a pas de limite en 0. En $+\infty$, on a par somme de limites $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$.

Pour $f_3(x)$, on a une forme indéterminée dans les deux cas. Mais en utilisant la quantité conjuguée, on trouve :

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} = \frac{x(x-1)}{x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}.$$

On trouve donc que $\lim_{x \to 0} f_3(x) = -\frac{1}{2}$. Mais on a toujours une forme indéterminée en $+\infty$. Nous allons nous en occuper différemment, en factorisant par x (que l'on peut supposer positif, car nous allons prendre la limite en $+\infty$) :

$$f_3(x) = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}.$$

On trouve donc $\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = 1$.

Exercice 5. Continuité

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie $f(x) = x - 2\,E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Est-ce que f est continue à droite (c'est-à-dire continue à droite en tout point a de $\mathbb{R}$) ? Continue à gauche ?

Si $a \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier, alors la fonction E est continue en a et donc f est continue comme composée de fonctions continues. Cependant, si a est un entier, alors on a :

$$\lim_{x \to a^+} E(x) = a, \qquad \lim_{x \to a^-} E(x) = a - 1.$$

Pour notre fonction f, on en déduit donc que :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = a - 2a = -a = f(a), \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = a - 2(a-1) = 2 - a \neq f(a).$$

Donc f est continue à droite en a, mais pas continue à gauche en a. Comme elle est continue à droite en tout point, elle est donc continue à droite globalement. Cependant, elle n'est pas continue à gauche.

2. On pose maintenant $g(x) = \cos(\pi\, f(x)) = \cos\left(\pi\left(x - 2\,E(x)\right)\right)$. Est-ce que g est continue à droite ? Continue à gauche ?

Comme avant, si $a \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier, alors g est continue en a comme composée de fonctions continues. En revanche, si a est un entier, alors :

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \cos(-a\pi) = g(a), \qquad \lim_{x \to a^-} g(x) = \cos\left((2-a)\pi\right) = \cos(2\pi - a\pi) = \cos(-a\pi) = g(a).$$

On en déduit que g est effectivement continue en a. Comme elle est continue en tout point, elle est donc continue globalement.