CONTRÔLE CONTINU 3

Raisonnement Mathématique II (RM2) • L1 MIASHS • lundi 14 février 2022

Durée : 1h30. Tout document ou matériel électronique est interdit. Lisez tout le sujet (recto/verso) avant de commencer et justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant la réponse donnée.

1. Si un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est fermé, alors il n'est pas ouvert.

C'est faux : $\mathbb{R}$ est fermé mais il est aussi ouvert.

2. Si $F \subset \mathbb{R}$ est fermé et $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert, alors $F \cap (\mathbb{R} \setminus U)$ est fermé.

C'est vrai : si U est ouvert alors $\mathbb{R} \setminus U$ est fermé, et l'intersection de deux fermés est fermée.

3. Si $F \subset \mathbb{R}$ est fermé et si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f(F)$ est fermé.

C'est faux : la fonction $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $F = \mathbb{R}$ est fermé, mais son image $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas fermée.

Exercice 2

Soit $n > 0$ un entier. On définit les sous-ensembles A_n ainsi que leur réunion et leur intersection par :

$$A_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{2n}\right[, \qquad A = \bigcap_n A_n, \qquad B = \bigcup_n A_n.$$

1. Soit $n > 0$ fixé. L'ensemble A_n est-il un voisinage de 1 ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?

L'ensemble A_n est un voisinage de 1 car il contient la boule ouverte $B(1, 1/n) =]1 - 1/n, 1 + 1/n[$. Il n'est pas ouvert car il n'est pas un voisinage de $1 - 1/n$. Il n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas un voisinage de $1 + 1/2n$.

2. Déterminer l'ensemble A. Est-il un voisinage de 1 ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?

Comme en TD, on trouve que $A = \{1\}$ ne contient qu'un seul point. En effet, comme $1 \in A_n$ pour tout n, on a bien $1 \in A$, donc $\{1\} \subset A$. Réciproquement, supposons que $x \in A$. Alors, pour tout n, on a :

$$1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{1}{2n} \Longrightarrow |x - 1| \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $|x - 1| = 0$ et donc que $x = 1$. L'ensemble A n'est donc pas un voisinage de 1, il n'est pas ouvert, mais il est fermé.

3. Déterminer l'ensemble B. Est-il un voisinage de 1 ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?

Comme $A_n \subset A_1$ pour tout n, on a $B = A_1 = [1 - 1/n, 1 + 1/2n[$. C'est un voisinage de 1, mais il n'est ni ouvert, ni fermé.

4. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et le bord de A_n pour un n fixé, puis la même chose pour A et B.

On a :

$$\overline{A_n} = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{2n}\right], \qquad A_n^\circ = \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{2n}\right[, \qquad \partial A_n = \left\{1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{2n}\right\}.$$

$$\bar{A} = \{1\}, \qquad A^\circ = \emptyset, \qquad \partial A = \{1\}.$$

$$\bar{B} = \left[0, \frac{3}{2}\right], \qquad B^\circ = \left]0, \frac{3}{2}\right[, \qquad \partial B = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}.$$

Exercice 3

Soit $f: A \to \mathbb{R}$ et $g: B \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(A) \subset B$. En revenant à la définition de continuité (avec des ϵ-δ), démontrer que $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ est continue.

Soit $a_0 \in A$ un point quelconque. Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en $f(a_0)$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall y \in B, \qquad |y - f(a_0)| < \delta \Longrightarrow \left|g(y) - g\big(f(a_0)\big)\right| < \epsilon.$$

De plus, comme f est continue en a_0, si on pose $\epsilon' = \delta$, on trouve qu'il existe $\delta' > 0$ tel que :

$$\forall x \in A, \qquad |x - a_0| < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(a_0)| < \epsilon' = \delta.$$

En combinant ces deux implications et en posant $y = f(x)$, on obtient :

$$\forall x \in A, \qquad |x - a_0| < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(a_0)| < \delta \Longrightarrow \left|g\big(f(x)\big) - g\big(f(a_0)\big)\right| < \epsilon.$$

On retrouve donc bien la condition qui montre que $g \circ f$ est continue.

Exercice 4

Pour chacune de ces fonctions, déterminer si la limite quand $x \to a$ existe et la calculer le cas échéant (où $E(x)$ désigne la partie entière de x).

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2}, \text{ en } a = 2. \qquad f_2(x) = \sqrt{x - 5} - \sqrt{x - 3}, \text{ en } a = +\infty.$$

$$f_3(x) = x \sin(\ln(x)), \text{ en } a = 0. \qquad f_4(x) = x - E(x), \text{ en } a = 1.$$

Pour f_1, on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais on peut faire les factorisations suivantes :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \qquad 2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$$

En conséquence de quoi :

$$f_1(x) = \frac{x-3}{2x-1} \xrightarrow[x\to 2]{} -\frac{1}{3}.$$

Pour f_2, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$. En utilisant la quantité conjuguée :

$$f_2(x) = \sqrt{x-5} - \sqrt{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x-5-(x-3)}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-3}} = \frac{-2}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-3}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$.

Pour $f_3(x)$, on utilise l'encadrement :

$$0 \leq |f_3(x)| \leq |x|.$$

Donc $\lim_{x\to 0} |f_3(x)| = 0$ d'après le théorème des gendarmes, donc $\lim_{x\to 0} f_3(x) = 0$.

Enfin, la limite à gauche de $f_4(x)$ en $a = 1$ vaut 1, tandis que sa limite à droite vaut 0, donc il n'y a pas de limite.

Exercice 5

On définit une fonction $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [-2, +\infty[, \qquad f(x) = \ln\left(1 + e^{1+x} + \frac{x}{2}\right).$$

1. Justifier que f est bien définie et continue sur $[-2, +\infty[$.

Pour $x \geq -2$, on a :

$$x \geq -2 \Longrightarrow \frac{x}{2} \geq -1 \Longrightarrow 1 + e^{1+x} + \frac{x}{2} \geq e^{1+x} > 0.$$

On en déduit que $f(x)$ est bien défini pour $x \geq -2$. Comme f s'obtient par composée, somme et produits de fonctions continues, elle est continue.

2. Calculer $f(-2)$ et $f(0)$ et en déduire qu'il existe au moins une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $x \in [-2, 0]$.

On obtient :

$$f(-2) = \ln\left(1 + e^{1-2} + \frac{-2}{2}\right) = \ln(e^{-1}) = -1,$$
$$f(0) = \ln\left(1 + e^{1+0} + \frac{0}{2}\right) = \ln(1+e).$$

D'une part, $f(-2) = -1$ est négatif. D'autre part, $f(0) = \ln(1+e)$ est supérieur à $\ln(e) = 1$ et est donc en particulier positif. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe une solution à l'équation $f(x) = 0$ entre -2 et 0.