CONTRÔLE CONTINU 3

Raisonnement Mathématique II (RM2) • L1 MIASHS • lundi 14 février 2022

Durée : 1h30. Tout document ou matériel électronique est interdit. Lisez tout le sujet (recto/verso) avant de commencer et justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant la réponse donnée.

1. Si un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est fermé, alors il n'est pas ouvert.
2. Si $F \subset \mathbb{R}$ est fermé et $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert, alors $F \cap (\mathbb{R} \setminus U)$ est fermé.
3. Si $F \subset \mathbb{R}$ est fermé et si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f(F)$ est fermé.

Exercice 2

Soit $n > 0$ un entier. On définit les sous-ensembles A_n ainsi que leur réunion et leur intersection par :

$$A_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{2n}\right[, \qquad A = \bigcap_n A_n, \qquad B = \bigcup_n A_n.$$

1. Soit $n > 0$ fixé. L'ensemble A_n est-il un voisinage de 1 ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?
2. Déterminer l'ensemble A. Est-il un voisinage de 1 ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?
3. Déterminer l'ensemble B. Est-il un voisinage de 1 ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?
4. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et le bord de A_n pour un n fixé, puis la même chose pour A et B.

Exercice 3

Soit $f: A \to \mathbb{R}$ et $g: B \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(A) \subset B$. En revenant à la définition de continuité (avec des ϵ-δ), démontrer que $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 4

Pour chacune de ces fonctions, déterminer si la limite quand $x \to a$ existe et la calculer le cas échéant (où $E(x)$ désigne la partie entière de x).

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2}, \text{ en } a = 2. \qquad f_2(x) = \sqrt{x-5} - \sqrt{x-3}, \text{ en } a = +\infty.$$

$$f_3(x) = x \sin(\ln(x)), \text{ en } a = 0. \qquad f_4(x) = x - E(x), \text{ en } a = 1.$$

Exercice 5

On définit une fonction $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [-2, +\infty[, \qquad f(x) = \ln\left(1 + e^{1+x} + \frac{x}{2}\right).$$

1. Justifier que f est bien définie et continue sur $[-2, +\infty[$.
2. Calculer $f(-2)$ et $f(0)$ et en déduire qu'il existe au moins une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $x \in [-2, 0]$.