# L1 MIASHS - RM2 - Corrigé du CC2

1. Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{A}$ un point adhérent à $A$. Soit $f$ une fonction de $A$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. (a) Soient $\varepsilon \in ]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|x^3| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 = \frac{\varepsilon^3}{8}$$

Or comme $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon^3 < \varepsilon$, on obtient

$$|x^3| < \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi

$$|x^3 + x| \leqslant |x^3| + |x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

où la première inégalité provient de l'inégalité triangulaire.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Il y a deux cas :

- Soit $0 < \varepsilon < 1$. On pose alors $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la question précédente :

$$|x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

- Soit $\varepsilon \geqslant 1$. On pose alors $\delta = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, en supposant que $|x| < \delta$ :

$$x^3 + x < \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

  Donc $f(x) \in B(0, 5/8) \subset B(0, \varepsilon)$. Autrement dit :

$$|x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

Au total, on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

ce qui signifie par définition que $f(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

(c) On remarque dans un premier temps que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\cos x$. On remarque ensuite que la fonction cosinus est majorée par 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leqslant 1$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leqslant |f(x)|$$

Soient alors $\varepsilon \in ]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la question (a) :

$$|x| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |f(x)| < \varepsilon$$

On a donc montré que :

$$\text{Pour tout } 0 < \varepsilon < 1, |x| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |g(x)| < \varepsilon$$

On peut alors répéter la démonstration de la question (b) en remplaçant $f$ par $g$ pour montrer que $g(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

3. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite d'elle-même. Par définition d'une valeur d'adhérence, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, $l$ est bien valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On va montrer à la question suivante que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n$$

admet 1 et -1 comme valeurs d'adhérence. Or $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. La réciproque est donc fausse.

(b) On considère la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ v_p = a_{2p} = 1$$

$(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 donc $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Comme il s'agit d'une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 1 en est bien valeur d'adhérence.
On considère ensuite la suite $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ w_p = a_{2p+1} = -1$$

De même, $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers -1. -1 est donc valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrons qu'il s'agit des seules valeurs d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. On pose $r = \min\left(\frac{|x-1|}{2}, \frac{|x+1|}{2}\right)$. Alors $1, -1 \notin B(x, r)$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin B(x, r)$, et $x$ ne peut pas être valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.