Université de Paris – Grands Moulins

L1 MIASHS : RM2
Interrogation Écrite Comptant pour le Contrôle Continu
Durée : 30 minutes

---

18 février 2022

Les documents, calculatrices, téléphones, ordinateurs etc. sont interdits!

Ne tournez pas la page avant d'avoir été autorisé.e à le faire

Le barème est **indicatif**. Toutes les réponses doivent être dûment justifiées.

1. [4 points] Complétez la définition suivante (vous réécrirez le début de la définition sur votre copie et écrirez tous les quantificateurs):

   Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{A}$ un point adhérent à A. Soit f une fonction de A à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si, et seulement si ...

2. [8 points] On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 + x$$

   et

$$g(x) = (x^3 + x)\cos(x)$$

   (a) Montrer que, pour tout $0 < \epsilon < 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|x| < \frac{\epsilon}{2} \implies |x^3 + x| < \epsilon.$$

   (b) En déduire que f admet une limite quand x tend vers 0, et la déterminer.

   (c) Montrer de même que g admet une limite quand x tend vers 0, et la déterminer.

3. [8 points] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On rappelle la définition d'une valeur d'adhérence:

   Définition : Le réel l est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l.

   (a) Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Montrer que l est forcément valeur d'adhérence. La réciproque est-elle vraie ?

   (b) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $a_n = (-1)^n$. Montrer que les valeurs d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 1 et -1, et qu'il n'y en a pas d'autres. On justifiera la réponse !