Devoir Non Surveillé

Remarque. Le sujet de ce devoir est inspiré de cette réponse de Tom Goodwillie sur MathOverflow et de la solution donnée par Omar Antolín Camarena.

L'objectif de ce devoir est de démontrer qu'il existe exactement sept structures de catégories de modèles sur la catégorie des ensembles pointés $\mathtt{Set}_*$. On rappelle que les objets de $\mathtt{Set}_*$ sont les paires (X, x_0) où X est un ensemble et $x_0 \in X$ est un élément. Les morphismes sont donnés par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathtt{Set}_*}((X,x_0),(Y,y_0)) = \{f : X \to Y \mid f(x_0) = y_0\}.$$

1. Démontrer que la catégorie $\mathtt{Set}_*$ est complète et cocomplète. On pourra utiliser le fait que $\mathtt{Set}$ l'est. Quel est le produit, le coproduit ? Quel est l'objet initial, l'objet final ?

2. On considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A,a_0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & (X,x_0) \arrow[d, "p"] \\
(B,b_0) \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "l"] & (Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et i pour qu'il existe une application pointée l telle que $l \circ i = f$ (i.e. le triangle supérieur commute). On pourra raisonner en termes d'éléments ayant les mêmes images.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et p pour qu'il existe une application pointée l telle que $p \circ l = g$ (i.e. le triangle inférieur commute). On pourra raisonner en termes d'éléments ayant ou non des antécédents.

   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur f, i, g, p pour qu'il existe une application pointée l telle que tout le diagramme commute.

3. Soit i et p deux applications pointées comme dans le diagramme précédent. On note $i \perp p$ si quelles que soient les applications f et g, on peut trouver un relèvement l.

   (a) Montrer que

$$i \perp p \iff \begin{cases} i \text{ est surjective ou } p \text{ est surjective,} \\ i^{-1}(b_0) = \{a_0\} \text{ ou } p^{-1}(y_0) = \{x_0\}, \\ i \text{ est injective sur } A \backslash i^{-1}(b_0) \text{ ou } p \text{ est injective.} \end{cases}$$

   (b) Soit $i : (A, a_0) \to (B, b_0)$ une application pointée. Déterminer la classe $i^\perp$ des applications pointées p telles que $i \perp p$.

   Dualement, soit $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application pointée. Déterminer la classe ${}^\perp p$ des applications pointées i telles que $i \perp p$.

4. Un système à factorisation faible est une paire de classes d'applications $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que :
   - $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\perp}$ est exactement la classe des applications qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les applications de $\mathcal{M}$;
   - $\mathcal{M} = {}^{\perp}\mathcal{E}$ est exactement la classe des applications qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les applications de $\mathcal{E}$;
   - toute application f peut se factoriser sous la forme $f = p \circ i$ où $i \in \mathcal{M}$ et $p \in \mathcal{E}$.

   (a) Soit i une application pointée quelconque. Montrer que la paire $R(i) := ({}^{\perp}(i^{\perp}), i^{\perp})$ est un système à factorisation faible. (On pourra raisonner au cas par cas sur i.)

   (b) Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ un système à factorisation faible quelconque. Montrer qu'il fait partie de la liste précédente.

5. Supposons désormais que $(\mathtt{Set}_*, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ est une structure de catégorie de modèles où $\mathcal{W}$ sont les équivalences faibles, $\mathcal{C}$ sont les cofibrations et $\mathcal{F}$ sont les fibrations.

   On rappelle que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ sont des systèmes à factorisation faibles et qu'ils font donc partie de la liste trouvée à la Question 4. Quelles paires sont possibles étant données les relations d'inclusions existant entre ces deux systèmes ?

6. La classe $\mathcal{W}$ doit satisfaire une condition supplémentaire pour obtenir une catégorie de modèles.

   (a) Quelle est cette condition ?

   (b) Exprimer la classe $\mathcal{W}$ en fonction de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.

   (c) Parmi les paires de systèmes à factorisation faibles $((\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F}), (\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}))$ possibles trouvées à la question précédente, lesquelles vérifient l'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{W}$?

7. Lister toutes les structures de catégories de modèles sur $\mathtt{Set}_*$. On pourra les numéroter pour y référer plus facilement par la suite.

8. Pour chacune de ces structures :

   (a) Décrire les objets fibrants et cofibrants.

   (b) Pour chaque ensemble pointé, décrire les cylindres et les objets chemins.

   (c) Décrire quand deux applications sont homotopes à gauche, resp. à droite.

   (d) Décrire la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathtt{Set}_*) = \mathtt{Set}_*[\mathcal{W}^{-1}]$.

9. Entre lesquelles de ces structures existe-t-il des équivalences de Quillen ?