Homotopie II : Examen

M2 Mathématiques Fondamentales

Durée : 3 heures. Les notes manuscrites ou imprimées sont autorisées. Le matériel électronique est interdit. Le sujet fait 2 pages. Écrivez en français ou en anglais et justifiez vos réponses.

Exercice A. Unicité des relèvements

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles et $A, Y \in \mathcal{M}$ deux objets. La catégorie $\mathcal{M}_{A,Y}$ a pour objets les triplets $(X, f: A \to X, g: X \to Y)$, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{A,Y}}\big((X,f,g),(X',f',g')\big) := \{\, h: X \to X' \mid hf = f',\ g'h = g \,\}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

1. Démontrer que $\mathcal{M}_{A,Y}$ est une catégorie de modèles avec les mêmes fibrations, cofibrations et équivalences faibles que $\mathcal{M}$.
2. Considérons le carré commutatif ci-contre, où i est une cofibration et p une fibration acyclique. Montrer que deux relèvements $l, l': B \to X$ (qui s'insèrent dans le carré commutatif), vu comme des morphismes de $\mathcal{M}_{A,Y}$, sont homotopes. (Indication : factoriser $B \cup_A B \to B$ par MC5.)

Exercice B. Morphismes aigus et propreté à droite

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles. On dit qu'un morphisme $p: X \to Y$ est *aigu* si, pour tous les diagrammes commutatifs comme ci-contre, si les deux carrés sont des pullbacks ($A = A' \times_{B'} B,\ \ A' = B' \times_Y X$) et si j est une équivalence faible, alors i est une équivalence faible.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "j"'] & B' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

1. Démontrer que toute fibration est aiguë si et seulement si $\mathcal{M}$ est *propre à droite*, c.-à-d. si le pullback d'une équivalence faible le long d'une fibration est une équivalence faible.

Considérons la catégorie $I = \{0 \to 2 \leftarrow 1\}$ et munissons $\mathcal{M}^I = \mathrm{Fun}(I, \mathcal{M})$ de la structure de modèles injective (équivalences faibles et fibrations sont définies objet par objet).

2. Montrer qu'un diagramme $\{X \to Z \leftarrow Y\} \in \mathcal{M}^I$ est fibrant si et seulement si Z est fibrant et les deux morphismes du diagramme sont des fibrations.

Pour les deux questions suivantes, on suppose que $\mathcal{M}$ est propre à droite.

3. Montrer que pour $\{X \to Z \leftarrow Y\} \in \mathcal{M}^I$, si $X \to Z$ est une fibration et X, Y, Z sont fibrants, alors le pullback $X \times_Z Y$ est faiblement équivalent au pullback homotopique (= holim_I du diagramme).
4. Montrer que la conclusion reste vraie si l'on suppose que $X \to Z$ est aigu (plutôt qu'une fibration).

Soit $\mathcal{M} = \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ muni de la structure de modèles projective. On munit $\mathcal{M}^I = \big(\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})\big)^I$ de la structure de modèles injective des diagrammes comme ci-dessus.

5. Soit $\{X \to Z \leftarrow Y\}$ un diagramme de $\mathbb{Z}$-modules tel que $X \to Z$ est surjectif. Démontrer que $\ker(X \to Z)$ est isomorphe à $\ker(X \times_Z Y \to Y)$.
6. Démontrer que $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ est propre à droite (indication : utiliser le lemme des cinq).
7. Soit $d \geq 1$ un entier et M un $\mathbb{Z}$-module, et soit $\Sigma^d M$ le module M vu comme un complexe de chaînes concentré en degré d. Calculer la limite homotopique du diagramme $\{0 \to \Sigma^d M \leftarrow 0\}$.

On considère maintenant $\mathcal{M} = sSet$ munie de la structure de modèles usuelle. Soit $\pi: \Lambda^2_1 \to \Delta^1$ l'unique application simpliciale donnée sur les sommets par $\pi(0) = 0$ et $\pi(1) = \pi(2) = 1$.

8. Démontrer que π n'est **pas** une fibration de Kan.
9. Construire une application $\sigma: \Delta^1 \to \Lambda^2_1$ telle que $\pi\sigma = \mathrm{id}_{\Delta^1}$ et $\sigma\pi$ est homotope à l'identité de Λ^2_1.
10. ★ Démontrer que π est aiguë.

Exercice C. Catégorie de modèles des relations d'équivalences

Soit $\mathcal{E}q$ la catégorie dont les objets sont les paires $(X, \sim)$ où X est un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur X et dont les morphismes sont les applications qui préservent l'équivalence, c.à.d. :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}q}\big((X, \sim_X), (Y, \sim_Y)\big) \coloneqq \{\, f : X \to Y \mid \forall x, x' \in X,\ x \sim_X x' \Longrightarrow f(x) \sim_Y f(x') \,\}.$$

On se permettra souvent le raccourci de notation $X = (X, \sim_X)$, $Y = (Y, \sim_Y)$, etc.

1. Démontrer que le produit catégorique est donné par $(X, \sim_X) \times (Y, \sim_Y) = (X \times Y, \sim_{X \times Y})$, où :
$$(x, y) \sim_{X \times Y} (x', y') \Leftrightarrow (x \sim_X x' \text{ and } y \sim_Y y').$$
2. Soit $A = \{a, b, c\}$ avec $a \sim b \nsim c$; $B = \{x, y\}$ avec $x \sim y$; et $C = \{u, v\}$ avec $u \nsim v$. Soit $f : C \to A$ donné par $f(u) = b$, $f(v) = c$, et $g : C \to B$ donné par $g(u) = x$ et $g(v) = y$. Démontrer que dans le pushout $A \cup_C B$, on a $[a] \sim [c]$. (Un dessin peut aider.)

Si $X \in \mathcal{E}q$ et $x \in X$, on note $[x] = \{\, x' \in X \mid x' \sim_X x \,\}$ et $(X/\sim) \coloneqq \{\, [x] \mid x \in X \,\}$. Pour $X, Y \in \mathcal{E}q$, on dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est une :

- *Cofibration* si $f : X \to Y$ est injective en tant qu'application d'ensembles.
- *Fibration* si, pour tout $x \in X$, la restriction $f|_{[x]} : [x] \to [f(x)]$ est surjective.
- *Équivalence faible* si l'application induite sur le quotient $f_* : (X/\sim) \to (Y/\sim)$ est bijective.

3. Soit $j : \{0\} \to (\{0, 1\}, \sim)$ avec $0 \sim 1$. Démontrer qu'un morphisme est une fibration si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à j. (On ne peut pas encore supposer que $\mathcal{E}q$ est une catégorie de modèles.)
4. Soit $i_0 : \emptyset \to \{0\}$ et $i_1 : (\{0, 1\}, \sim_1) \to (\{0, 1\}, \sim_2)$ où $0 \nsim_1 1$ et $0 \sim_2 1$. Démontrer qu'un morphisme est une fibration acyclique si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à i_0 et i_1.
5. Démontrer que $\mathcal{E}q$ est une catégorie de modèles cofibrement engendrée, avec cofibrations génératrices $\mathcal{I} = \{i_0, i_1\}$ et cofibrations acycliques génératrices $\mathcal{J} = \{j\}$.

On définit une relation d'équivalence $\approx$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}q}(X, Y)$ par (où $f, g : X \to Y$) :

$$f \approx g \Leftrightarrow \big(\forall x \in X, \quad f(x) \sim_Y g(x)\big).$$

On note $[X, Y]$ le hom-set muni de cette relation d'équivalence.

6. Démontrer que deux morphismes f, g sont homotopes dans $\mathcal{E}q$ si et seulement si $f \approx g$.
7. Démontrer que le foncteur $\pi : \mathcal{E}q \to \mathcal{S}et$, donné sur les objets par $X \mapsto X/\sim$, induit une équivalence de catégories $\mathrm{Ho}(\mathcal{E}q) \simeq \mathcal{S}et$.
8. Démontrer que le pullback d'une équivalence faible le long d'une fibration est une équivalence faible.
9. ★ Démontrer que le pushout d'une équivalence faible le long d'une cofibration est une équivalence faible.
10. Démontrer qu'il y a un isomorphisme dans $\mathcal{E}q$, naturel en $A, X, Y \in \mathcal{E}q$:
$$\big[A, [X, Y]\big] \cong [A \times X, Y].$$

Soit $i : A \to B$ une cofibration et $p : X \to Y$ une fibration (dans $\mathcal{E}q$). On considère le « pullback-corner » :

$$(i^*, p_*) : [B, X] \to [A, X] \times_{[B,Y]} [A, Y].$$

11. Démontrer que (i^*, p_*) est une fibration dans $\mathcal{E}q$.
12. Démontrer que cette fibration est acyclique si l'un des morphismes i ou p est acyclique.