Devoir Non Surveillé

Remarque. Le sujet de ce devoir est inspiré de cette réponse de Tom Goodwillie sur MathOverflow et de la solution donnée par Omar Antolín Camarena.

L'objectif de ce devoir est de démontrer qu'il existe exactement sept structures de catégories de modèles sur la catégorie des ensembles pointés Set_*. On rappelle que les objets de Set_* sont les paires (X, x_0) où X est un ensemble et $x_0 \in X$ est un élément. Les morphismes sont donnés par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y \mid f(x_0) = y_0\}.$$

1. Démontrer que la catégorie Set_* est complète et cocomplète. On pourra utiliser le fait que Set l'est. Quel est le produit, le coproduit ? Quel est l'objet initial, l'objet final ?

Solution : Notons $U : \mathrm{Set}_* \to \mathrm{Set}$ le foncteur d'oubli défini par $U(X, x_0) = X$. On va identifier implicitement les points d'un ensemble X avec les applications $* \to X$ et on notera indifféremment $x \in X$ ou $x : * \to X$ pour ces objets. Soit $A : I \to \mathrm{Set}_*$ un diagramme, on note (A_i, x_i) la valeur de A en $i \in I$.

- Considérons la limite $\lim_{i\in I} U \circ A \in \mathrm{Set}$. Les différents points base $x_i \in A_i$ pour $i \in I$ définissent une famille d'applications $* \to A_i$ qui sont compatibles avec les morphismes de I (car A est un foncteur à valeurs dans Set_* donc toutes les applications $A_i \to A_j$ sont pointées). Par la propriété universelle de la limite, on obtient une application $* \to \lim_{i\in I} U \circ A$ qui envoie le point sur $x \in \lim_{i\infty I} U \circ A$. On vérifie alors facilement que $(\lim_{i\in I} U \circ A, x)$ est la limite de A dans Set_*.

- Pour la colimite, on considère le pushout :

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{i\in I} * \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bigsqcup_{i\in I} x_i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & * \arrow[d, dashed] \\
\operatorname{colim}_{i\in I} U \circ A \arrow[r, dashed] & C
\end{tikzcd}$$

  En d'autres termes, C est le quotient de $\operatorname{colim}_{i\in i} U \circ A$ où l'on identifie les points base des différents A_i. L'application $* \to C$ à droite dans le carré définit un point base $x \in C$. On vérifie alors facilement que $(C, *)$ est la colimite de A dans Set_*.

L'objet initial est égal à l'objet final : c'est le singleton $*$. Le produit est simplement donné par $(A, a_0) \times (B, b_0) = (A \times B, (a_0, b_0))$. Le coproduit $(A, a_0) \sqcup (B, b_0)$ est le quotient de $A \sqcup B$ par l'identification $a_0 = b_0$. On le note $A \vee B$.

2. On considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A, a_0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & (X, x_0) \arrow[d, "p"] \\
(B, b_0) \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "l"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et i pour qu'il existe une application pointée l telle que $l \circ i = f$ (i.e. le triangle supérieur commute). On pourra raisonner en termes d'éléments ayant les mêmes images.

> **Solution :** Il faut et il suffit que si deux éléments $a, a' \in A$ sont tels que $i(a) = i(a')$, alors $f(a) = f(a')$. Dans ce cas, on peut définir $l : B \to X$ par $l(b) = f(a)$ si $b = i(a)$ (ce qui ne dépend pas de a grâce à la condition ci-dessus), et $l(b) = x_0$ sinon. Sinon, s'il existe $a, a' \in A$ tels que $i(a) = i(a') = b$ mais $f(a) \neq f(a')$, alors on ne peut pas définir l, car on aurait nécessairement $l(b) = l(i(a)) = f(a) \neq f(a') = l(i(a')) = l(b)$, ce qui est absurde.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et p pour qu'il existe une application pointée l telle que $p \circ l = g$ (i.e. le triangle inférieur commute). On pourra raisonner en termes d'éléments ayant ou non des antécédents.

> **Solution :** Il faut et il suffit que si $y \in Y$ a un antécédent par g, alors il a un antécédent par p. Dans ce cas, on peut définir $l : B \to X$ en prenant pour $l(b)$ n'importe quel antécédent de $g(b)$ (et si $b = b_0$ on choisit $l(b_0) = x_0$). Réciproquement, si l existe, et si $y \in Y$ a un antécédent par g, alors $y = g(b) \implies p(l(b)) = y$ donc il a aussi un antécédent par p.

(c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur f, i, g, p pour qu'il existe une application pointée l telle que tout le diagramme commute.

> **Solution :** On vérifie que c'est la combinaison des deux conditions : tout élément de $\operatorname{im} g$ a un antécédent par p et si $i(a) = i(a')$ alors $f(a) = f(a')$. Notez que ce n'est pas évident : il aurait pu y avoir deux relèvement différents, l tel que $l \circ i = f$ et l' tel que $p \circ l' = g$, mais pas de relèvement commun…Si l'on est dans ce cas, alors on peut définir $l : B \to X$ par :
>
> $$l(b) := \begin{cases} f(a) & \text{si } b = i(a), \\ \text{n'importe quel antécédent de } g(b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit i et p deux applications pointées comme dans le diagramme précédent. On note $i \perp p$ si quelles que soient les applications f et g, on peut trouver un relèvement l.

(a) Montrer que

$$i \perp p \iff \begin{cases} i \text{ est surjective ou } p \text{ est surjective,} \\ i^{-1}(b_0) = \{a_0\} \text{ ou } p^{-1}(y_0) = \{x_0\}, \\ i \text{ est injective sur } A \backslash i^{-1}(b_0) \text{ ou } p \text{ est injective.} \end{cases}$$

Solution : Il y a de nombreux cas à vérifier.

- Si i est bijective ou si p est bijective alors on a clairement $i \perp p$.
- Supposons que i est surjective et p est injective. On voit implicitement X comme un sous-ensemble de Y. Soit $b \in B$, alors par surjectivité $b = i(a)$, donc $g(b) = f(a) \in X \subset Y$. En d'autres termes, l'image de g est incluse dans X. On peut donc voir g comme une fonction $l : B \to X$ qui sera notre « relèvement ».
- Si i est injective sur $A \backslash i^{-1}(b_0)$, $p^{-1}(y_0) = \{x_0\}$ et p surjective, les deux conditions de la question précédente sont vérifiées : si $i(a) = i(a')$, alors soit $a = a'$, soit $i(a) = i(a') = b_0$ et donc $p(f(a)) = p(f(a')) = y_0$, alors la condition sur p donne que $f(a) = f(a')$.
- Si i est surjective et injective sur $A \backslash i^{-1}(b_0) = \{a_0\}$ et que $p^{-1}(y_0) = \{x_0\}$, alors i est une bijection en-dehors du point base, et sur le point base le relèvement défini par $l(b_0) = x_0$ fait bien commuter le diagramme par la condition sur p.
- Supposons que ni i ni p ne sont injectives. Il existe $a \neq a' \in A$ tels que $i(a) = i(a') = b$ et $x \neq x' \in X$ tels que $p(x) = p(x') = y$. On définit $f : A \to X$ par $f(a) = x$, $f(a') = x'$, et $f(\alpha) = *$ pour $\alpha \neq a$. On définit aussi $g : B \to Y$ par $g(b) = y$ et $g(\beta) = *$ pour $\beta \neq b$; on vérifie que le carré commute. Alors il ne peut pas exister de relèvement $l : B \to X$. En effet, on devrait avoir $l(b) = l(i(a)) = f(a) = x \neq x' = f(a') = l(i(a')) = l(b)$, ce qui est absurde. Les autres cas de non-injectivité commune sont similaires.
- Supposons enfin que ni i ni p ne sont surjectives. Il existe $b \in B$ sans préimage par i et $y \in Y$ sans préimage par p. On définit $f : A \to X$ par $f(a) = x_0$ pour tout a, et $g : B \to Y$ par $g(b) = y$ (ce qui est possible car $b \neq b_0$) et $g(\beta) = y_0$ pour $\beta \neq b$. Le carré commute (car b n'a pas de préimage), mais il ne peut pas exister de relèvement $l : B \to X$, car sinon on aurait $y = g(b) = p(l(b))$ ce qui contredit le fait que y n'a pas de préimage.

(b) Soit $i : (A, a_0) \to (B, b_0)$ une application pointée. Déterminer la classe $i^{\perp}$ des applications pointées p telles que $i \perp p$.

Dualement, soit $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application pointée. Déterminer la classe ${}^{\perp}p$ des applications pointées i telles que $i \perp p$.

Solution : Dans toute la suite, on va noter Iso la classe des bijections, Surj la classe des surjections, $\mathsf{Inj}_{\neq *}$ la classe des injections en-dehors du point base, Inj_* la classe des injections au-dessus du point base, $\mathsf{Inj} = \mathsf{Inj}_* \cap \mathsf{Inj}_{\neq *}$ et All la classe de tous les morphismes. On raisonne au cas par cas en utilisant la question précédente et on obtient le tableau suivant (V = vrai, F = faux) :

$i \in \mathsf{Surj}$	$i \in \mathsf{Inj}_*$	$i \in \mathsf{Inj}_{\neq *}$	$i^{\perp}$
V	V	V	All
V	F	V	Inj_*
V	V/F	F	Inj
F	V	V	Surj
F	F	V	$\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_*$
F	V/F	F	Iso

Pour le cas dual, on obtient :

$p \in \mathsf{Surj}$	$p \in \mathsf{Inj}_*$	$p \in \mathsf{Inj}$	${}^{\perp}p$
V	V	V	All
F	V	V	Surj
V	V	F	$\mathsf{Inj}_{\neq *}$
V	F	F	Inj
F	V	F	$\mathsf{Inj}_{\neq *} \cap \mathsf{Surj}$
F	F	F	Iso

4. Un système à factorisation faible est une paire de classes d'applications $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que :

   - $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\perp}$ est exactement la classe des applications qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les applications de $\mathcal{M}$;
   - $\mathcal{M} = {}^{\perp}\mathcal{E}$ est exactement la classe des applications qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les applications de $\mathcal{E}$;
   - toute application f peut se factoriser sous la forme $f = p \circ i$ où $i \in \mathcal{M}$ et $p \in \mathcal{E}$.

   (a) Soit i une application pointée quelconque. Montrer que la paire $R(i) := ({}^{\perp}(i^{\perp}), i^{\perp})$ est un système à factorisation faible. (On pourra raisonner au cas par cas sur i.)

Solution : Dans tous les cas il sera clair que $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\perp}$ et ${}^{\perp}\mathcal{E} = \mathcal{M}$. Les valeurs possibles de $R(i)$, étant donné le tableau précédent, sont :

1. $R(i) = (\mathsf{Iso}, \mathsf{All})$. On peut bien sûr toujours factoriser une application $f : A \to X$ en une application quelconque suivie d'un isomorphisme (par exemple $f = \mathrm{id}_X \circ f$).
2. $R(i) = (\mathsf{Inj}, \mathsf{Surj})$. On peut toujours factoriser une application $f : A \to X$ en une surjection suivie d'une injection : on a $f = i \circ q$ où $q : A \to \operatorname{im} f$ est une surjection et $i : \operatorname{im} f \to X$ est une inclusion.
3. $R(i) = (\mathsf{Surj}, \mathsf{Inj})$. Soit $f : A \to X$ une application quelconque, alors on a $f = q \circ i$ où $i : A \to A \vee X$ est l'inclusion canonique dans $A \vee X$, le quotient de l'union disjointe $A \sqcup X$ par la relation $a_0 = x_0$, et $q : A \vee X \to X$ est la surjection définie par $q(x) = x$ si $x \in X$ et $q(a) = x_0$ si $a \in A$.
4. $R(i) = (\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_{\neq *}, \mathsf{Inj}_*)$. On factorise $f : A \to X$ en quotientant d'abord $A \backslash f^{-1}(x_0)$ par $a \sim a' \iff f(a) = f(a')$ (c'est injectif au dessus du point base) puis on applique f au reste.
5. $R(i) = (\mathsf{Inj}_{\neq *}, \mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_*)$. On factorise $f : A \to X$ en quotientant d'abord en-dehors du point base puis en quotientant la préimage du point base.
6. $R(i) = (\mathsf{All}, \mathsf{Iso})$. C'est également clairement un système à factorisation faible.

(b) Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ un système à factorisation faible quelconque. Montrer qu'il fait partie de la liste précédente.

Solution : Il s'agit simplement d'une vérification au cas par cas, selon si (par exemple) $\mathcal{E}$ contient ou non des applications des classes considérées.

5. Supposons désormais que $(\mathsf{Set}_*, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ est une structure de catégorie de modèles où $\mathcal{W}$ sont les équivalences faibles, $\mathcal{C}$ sont les cofibrations et $\mathcal{F}$ sont les fibrations.

   On rappelle que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ sont des systèmes à factorisation faibles et qu'ils font donc partie de la liste trouvée à la Question 4. Quelles paires sont possibles étant données les relations d'inclusions existant entre ces deux systèmes ?

6. La classe $\mathcal{W}$ doit satisfaire une condition supplémentaire pour obtenir une catégorie de modèles.

   (a) Quelle est cette condition ?

> **Solution :** C'est la condition (MC2), ou «2 parmi 3» : si f et g sont deux morphismes composables et si au moins deux morphismes parmi f, g et $g \circ f$ sont dans $\mathcal{W}$, alors le troisième aussi.

(b) Exprimer la classe $\mathcal{W}$ en fonction de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.

> **Solution :** On peut exprimer la classe des cofibrations acycliques comme $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = {}^{\perp}\mathcal{F}$, et celle des fibrations acycliques comme $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}^{\perp}$. Enfin, $\mathcal{W} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) \circ (\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) = \mathcal{C}^{\perp} \circ {}^{\perp}\mathcal{F}$ est donc la classe des applications qui s'écrivent comme la composition d'une application qui a la propriété de relèvement à gauche par rapport à $\mathcal{F}$ avec une application qui a la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathcal{C}$.

(c) Parmi les paires de systèmes à factorisation faibles $((\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F}), (\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}))$ possibles trouvées à la question précédente, lesquelles vérifient l'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{W}$?

> **Solution :** On note que toutes les paires ne sont pas possibles, car on doit avoir $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{F}$. Vu les relations d'inclusions entre Iso, Inj, Surj, $\mathsf{Inj}_{\neq *}$, $\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_{\neq *}$ et All, il y a 19 paires possibles. On doit de plus vérifier que $\mathcal{W} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) \circ (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})$ vérifie «2 parmi 3», or seules les classes All et Iso (parmi les classes considérées) vérifient cette propriété. Les paires possibles sont donc :

$(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$	$(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}))$	$(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}) \circ (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})$
$(\mathsf{Iso}, \mathsf{All})$	$(\mathsf{Iso}, \mathsf{All})$	All
$(\mathsf{Iso}, \mathsf{All})$	$(\mathsf{All}, \mathsf{Iso})$	Iso
$(\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_{\neq *}, \mathsf{Inj}_*)$	$(\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_{\neq *}, \mathsf{Inj}_*)$	All
$(\mathsf{Inj}, \mathsf{Surj})$	$(\mathsf{Inj}, \mathsf{Surj})$	All
$(\mathsf{Surj}, \mathsf{Inj})$	$(\mathsf{Surj}, \mathsf{Inj})$	All
$(\mathsf{Inj}_{\neq *}, \mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_*)$	$(\mathsf{Inj}_{\neq *}, \mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_*)$	All
$(\mathsf{All}, \mathsf{Iso})$	$(\mathsf{All}, \mathsf{Iso})$	All

7. Lister toutes les structures de catégories de modèles sur Set_*. On pourra les numéroter pour y référer plus facilement par la suite.

> **Solution :** On trouve donc finalement sept structures de catégorie de modèles sur

Set_* :

N°	$\mathcal{W}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{F}$
1	Iso	All	All
2	All	All	Iso
3	All	Iso	All
4	All	Inj	Surj
5	All	Surj	Inj
6	All	$\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_{\neq *}$	Inj_*
7	All	$\mathsf{Inj}_{\neq *}$	$\mathsf{Surj} \cap \mathsf{Inj}_*$

8. Pour chacune de ces structures :
   (a) Décrire les objets fibrants et cofibrants.
   (b) Pour chaque ensemble pointé, décrire les cylindres et les objets chemins.
   (c) Décrire quand deux applications sont homotopes à gauche, resp. à droite.
   (d) Décrire la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathsf{Set}_*) = \mathsf{Set}_*[\mathcal{W}^{-1}]$.

Solution :

1. Tous les objets sont fibrants et cofibrants. Les cylindres sont tous de la forme $A \vee A \hookrightarrow A \xrightarrow{\sim} A$, les objets chemins sont tous de la forme $X \xrightarrow{\sim} X \to X \times X$. Deux applications sont homotopes sont nécessairement égales. La catégorie homotopique est Set_* elle-même (on n'inverse que les bijections).

2. Tous les objets sont cofibrants, seul $*$ est fibrant. Les cylindres de A sont n'importe quelle factorisation de $A \vee A \to A$. Les objets chemins sont tous de la forme $X \xrightarrow{\sim} X \times X \twoheadrightarrow X$. Deux applications quelconques sont toujours homotopes à droite et à gauche. La catégorie homotopique est la catégorie triviale $*$ à un objet et un morphisme.

3. Dual du cas précédent.

4. Tous les objets sont fibrants et cofibrants. Un cylindre est par exemple donné par $A \vee A \hookrightarrow A \vee A \xrightarrow{\sim} A$, un objet chemin par $X \xrightarrow{\sim} X \times X \twoheadrightarrow X$. Deux applications quelconques sont toujours homotopes à droite et à gauche. La catégorie homotopique est triviale.

5. Dual du cas précédent.

6. Seul $*$ est fibrant ou cofibrant. Un cylindre est par exemple donné par $A \vee A \hookrightarrow A \vee A \xrightarrow{\sim} A$, un objet chemin par $X \xrightarrow{\sim} X \times X \twoheadrightarrow X$. Deux applications quelconques sont toujours homotopes à droite et à gauche. La catégorie homotopique est triviale.
7. Tous les objets sont cofibrants, seul $*$ est fibrant. Un cylindre est donné par $A \vee A \hookrightarrow A \vee A \xrightarrow{\sim} A$, un objet chemin par $X \xrightarrow{\sim} X \times X \twoheadrightarrow X$. Toutes les applications sont homotopes et la catégorie homotopique est triviale.

9. Entre lesquelles de ces structures existe-t-il des équivalences de Quillen ?

Solution : Le premier exemple ne peut pas être équivalent de Quillen aux quatre autres, car leurs catégories homotopiques sont différentes. On a des équivalences de Quillen comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (4) \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dl, shift left] & & (2) \arrow[ll, shift right] \arrow[dl, shift left] \arrow[ddl, shift left] \\
(3) \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & & (7) \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] \arrow[dl, shift left] & \\
 & (6) \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] \arrow[r, shift left] & (5) \arrow[l, shift left] \arrow[uur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

En particulier, les deux structures $(\mathsf{Set}_*, \mathsf{All}, \mathsf{Inj}, \mathsf{Surj})$ et $(\mathsf{Set}_*, \mathsf{All}, \mathsf{Surj}, \mathsf{Inj})$ sont connectés par un zigzag d'équivalence de Quillen, mais pas par une équivalence directe !