Examen

Durée : 3 heures. Les notes de cours sont autorisées. Le matériel électronique est interdit.

Exercice 1 Soit C une catégorie de modèles. Considérons un cube commutatif comme à droite.

Supposons que la face (A, B, C, D) du fond et la face (A', B', C', D') de l'avant sont des pushouts ($D = B \cup_A C$ et $D' = B' \cup_{A'} C'$). Soit $h : C \cup_A A' \to C'$ le morphisme induit par la face de gauche. Montrer que si f et h sont des cofibrations, alors g aussi.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & B \arrow[dr, "f"] \arrow[dd] & \\
& A' \arrow[rr, crossing over] & & B' \arrow[dd] \\
C \arrow[rr] \arrow[dr] & & D \arrow[dr, "g"] & \\
& C' \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over] & & D'
\end{tikzcd}$$

Exercice 2 Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ deux adjoints de Quillen à gauche. Montrer que $G \circ F : \mathsf{C} \to \mathsf{E}$ est un adjoint de Quillen à gauche. Construire une transformation naturelle entre les foncteurs dérivés totaux $\mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F \Rightarrow \mathbb{L}(G \circ F)$ et montrer que c'est un isomorphisme. (On utilisera des remplacements cofibrants fonctoriels.)

Exercice 3 Soit C une catégorie de modèles et $W \in \mathsf{C}$ un objet fixé. On note $\mathsf{C}_{/W}$ la catégorie dont les objets sont les paires (Y, f) où $Y \in \mathsf{C}$ et $f : Y \to W$, et $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{/W}}((Y, f), (Z, g)) := \{h : Y \to Z \mid g \circ h = f\}$.

1. Montrer que $\mathsf{C}_{/W}$ est une catégorie de modèles, où $h : (Y, f) \to (Z, g)$ est une équivalence faible/fibration/cofibration si c'en est une dans C. Décrire ses objets fibrants et cofibrants.
2. Soit $\alpha : W \to W'$ un morphisme. Il induit un foncteur $\alpha_* : \mathsf{C}_{/W} \to \mathsf{C}_{/W'}$ défini sur les objets par $\alpha_*(Y, f) = (Y, \alpha \circ f)$ et sur les morphismes par $\alpha_*(h) = h$. Décrire son adjoint à droite $\alpha^* : \mathsf{C}_{/W'} \to \mathsf{C}_{/W}$.
3. Montrer que l'adjonction $\alpha_* \dashv \alpha^*$ est une adjonction de Quillen.
4. Supposons que C est propre à droite, c.-à-d. le pullback d'une équivalence faible le long d'une fibration est encore une équivalence faible. Montrer que si $\alpha : W \to W'$ est une équivalence faible, alors l'adjonction $\alpha_* \dashv \alpha^*$ est une équivalence de Quillen.

Exercice 4 Soit R et S deux anneaux et M un (R, S)-bimodule, c.-à-d. M est un R-module à gauche et un S-module à droite qui vérifie $r \cdot (m \cdot s) = (r \cdot m) \cdot s$. On définit le foncteur $T_M : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(S) \to \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ par $(C_i, d_i)_{i \geq 0} \mapsto (M \otimes_S C_i, \mathrm{id}_M \otimes d_i)_{i \geq 0}$ avec $r \cdot (m \otimes x) = (r \cdot m) \otimes x$.

1. Montrer que T_M est un adjoint à gauche et décrire son adjoint à droite. (Indice : penser à un Hom.)
2. Montrer que l'adjonction est de Quillen si l'on utilise la structure projective de $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\cdot)$ et que M est projectif comme R-module. Est-ce vrai si M n'est pas projectif ?
3. Décrire un remplacement cofibrant du complexe de chaînes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ (en degré 0).
4. On admet que T_M admet un foncteur dérivé total à gauche même si M n'est pas projectif. On note $\mathrm{Tor}_i^S(M, N) := H_i(\mathbb{L}T_M(N))$. Calculer $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 On note Cat la catégorie des catégories et on admettra qu'elle est complète et cocomplète. On dit qu'un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est une :

- équivalence faible si c'est une équivalence de catégories ;
- cofibration si F est injectif sur les objets : $\forall c, c' \in \mathsf{C}$, $F(c) = F(c') \implies c = c'$;
- fibration si c'est une isofibration : pour tout objet $c \in \mathsf{C}$ et pour tout isomorphisme $g : F(c) \to d$, il existe un isomorphisme $f : c \to c'$ tel que $F(c') = d$ et $F(f) = g$.

1. Soit $[0] = \{0\}$ la catégorie ayant un unique objet 0 et un unique morphisme (id_0). Soit $\mathsf{I} = \{0 \leftrightarrows 1\}$ la catégorie ayant deux objets 0 et 1 et quatre morphismes, id_0, $\mathrm{id}_1, f : 0 \to 1, g : 1 \to 0$, avec $f \circ g = \mathrm{id}_1$ et $g \circ f = \mathrm{id}_0$. Montrer qu'un foncteur est une fibration si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à $[0] \hookrightarrow \mathsf{I}$ (c.-à-d. c'est une cofibration acyclique génératrice).
2. Démontrer les axiomes (MC2) et (MC3) pour Cat avec cette structure de modèles.
3. On considère un carré commutatif comme à droite, où I est une cofibration et P une fibration. On suppose d'abord que P est une fibration acyclique. Montrer que P est surjectif sur les objets puis construire un relèvement L.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "I"'] & \mathsf{E} \arrow[d, two heads, "P"] \\ \mathsf{D} \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "L"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$$

4. On suppose maintenant que I est une cofibration acyclique.
   (a) Montrer qu'il existe un foncteur $R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tel que $R \circ I = \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ et un isomorphisme naturel $\alpha : I \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$ tel que pour tout $c \in \mathsf{C}$, $\alpha_{I(c)} = \mathrm{id}_{I(c)}$.
   (b) Pour $d \in \mathsf{D}$, trouver un objet $L(d) \in \mathsf{E}$ et un isomorphisme $\beta_d : F(R(d)) \to L(d)$ tels que $LI(c) = F(c)$, $PL(d) = G(d)$, $P(\beta_d) = G(\alpha_d)$ et $\beta_{I(c)} = \mathrm{id}_{F(c)}$.
   (c) Terminer de construire le foncteur L.
5. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur. On note $\mathbb{P}_F$ la catégorie dont les objets sont les triplets (c, α, d) où $c \in \mathsf{C}$, $d \in \mathsf{D}$ et $\alpha : F(c) \to d$ est un isomorphisme ; $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}_F}((c, \alpha, d), (c', \alpha', d')) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c, c')$. Construire un foncteur $I : \mathsf{C} \to \mathbb{P}_F$ et montrer que c'est une cofibration acyclique. Construire également un foncteur $P : \mathbb{P}_F \to \mathsf{D}$ tel que $F = P \circ I$ et montrer que P est une fibration.
6. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur. En s'inspirant de la question précédente, construire un « objet cylindre » pour factoriser F sous la forme $\mathsf{C} \hookrightarrow \cdot \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}$.
7. Quelles catégories sont (co)fibrantes ? Quand deux foncteurs sont-ils homotopes à gauche/droite ?
8. Trouver un ensemble de cofibrations génératrices, c.-à-d. un ensemble $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I}^\perp = \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ (s'inspirer de la question 1). Montrer que $[0]$ et que les sources des foncteurs de $\mathcal{I}$ sont petits.

Exercice 6 Pour $A_\bullet, B_\bullet \in s\mathsf{Ab}$, le produit tensoriel est $(A \otimes B)_k = A_k \otimes B_k$ avec $d_i = d_i \otimes d_i$ et $s_j = s_j \otimes s_j$. Le complexe normalisé N_*A est par $N_k A = A_k / (\bigcup_{j=0}^{k-1} s_j(A_{k-1}))$ et $d = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i : N_k A \to N_{k-1} A$. Pour $C, D \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$, on a $(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$ et $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes dy$.

1. Soit $A_\bullet, B_\bullet \in s\mathsf{Ab}$. Pour $a \in A_n$ et $b \in B_n$, on pose
$$a \bigtriangleup b := \sum_{p+q=n} (d_{n-p+1} d_{n-p+2} \dots d_n(a)) \otimes (\underbrace{d_0 \dots d_0}_{n-q \text{ fois}}(b)) \in \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q.$$
Vérifier que $\bigtriangleup : N_*(A \otimes B) \to N_*A \otimes N_*B$ est compatible avec la différentielle et le quotient.
2. Soit $\mathrm{Sh}_{p,q} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$. Par exemple $\mathrm{Sh}_{2,1} = \{(1,2,3), (1,3,2), (3,1,2)\}$. On définit $: N_*A \otimes N_*B \to N_*(A \otimes B)$ en posant, pour $a \in A_p$ et $b \in B_q$:
$$a \bigtriangledown b := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \cdot s_{\sigma(p)} s_{\sigma(p-1)} \dots s_{\sigma(1)}(a) \otimes s_{\sigma(p+q)} s_{\sigma(p+q-1)} \dots s_{\sigma(p+1)}(b) \in A_n \otimes B_n.$$
Vérifier que $\bigtriangledown$ est compatible avec la différentielle et le quotient, associatif ($a \bigtriangledown (b \bigtriangledown c) = (a \bigtriangledown b) \bigtriangledown c$), et gradué commutatif ($b \bigtriangledown a = (-1)^{\deg b \cdot \deg a} a \bigtriangledown b$).
3. Montrer que $\bigtriangleup \circ \bigtriangledown$ est l'identité.
4. Décrire les simplexes non-dégénérés de $(\Delta^p \times \Delta^q)_{p+q}$ en termes de $\mathrm{Sh}_{p,q}$.