

ESPACES DE CONFIGURATION ET OPÉRADES

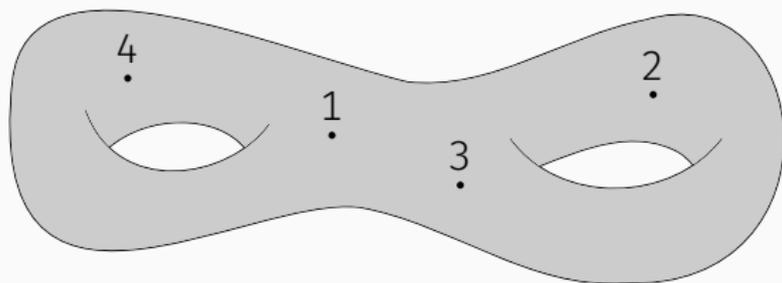
Najib Idrissi

8 novembre 2018 @ Séminaire Géométrie et Topologie – IMJ-PRG



M : variété de dimension n

$$\text{Conf}_k(M) := \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$



- Groupes de tresses
- Espaces de lacets
- Espaces de modules de courbes
- Physique : particules en mouvement
- Robotique : planification de trajets

Théorie de l'homotopie : on étudie les espaces à homotopie près à l'aide d'invariants algébriques (homologie, cohomologie, groupes d'homotopie...).

Rappels :

- $f, g : X \rightarrow Y$ sont **homotopes** ($f \sim g$) si $\exists H_t : X \rightarrow Y, H_0 = f$ et $H_1 = g$;
- f est une **équivalence d'homotopie** si f est inversible à \sim près ;
- X et Y ont le même **type d'homotopie** s'ils sont reliés par des équivalences d'homotopie.

Théorie de l'homotopie réelle (/rationnelle) : on travaille à homotopie près et « modulo la torsion ».

→ La théorie de Sullivan (1977) montre que **l'algèbre des formes de de Rham** $\Omega_{\text{dR}}^*(M)$ détermine le type d'homotopie réel.

UNE QUESTION OUVERTE

Question

Le type d'homotopie de M détermine-t-il le type d'homotopie de $\text{Conf}_k(M)$? Comment « calculer » le type d'homotopie de $\text{Conf}_k(M)$?

Variétés non-compactes

Faux : $\text{Conf}_2(\mathbb{R}) \not\sim \text{Conf}_2(\{0\})$ alors que $\mathbb{R} \sim \{0\}$.

Variétés compactes sans bord

Longoni–Salvatore (2005) : contre-exemple (espaces lenticulaires)...
mais non simplement connexe.

Variétés compactes sans bord simplement connexes

L'invariance homotopique reste une question ouverte.

CONFIGURATIONS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

Présentation de $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ [Arnold, Cohen]

- Générateurs : ω_{ij} de degré $n - 1$ (pour $1 \leq i \neq j \leq k$)

- Relations :

$$\omega_{ij}^2 = \omega_{ji} - (-1)^n \omega_{ij} = \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0$$

Théorème (Arnold 1969)

Formalité : $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{C})) \sim_{\mathbb{C}} \Omega_{\text{dR}}^*(\text{Conf}_k(\mathbb{C}))$, $\omega_{ij} \mapsto d \log(z_i - z_j)$.

Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014)

$H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \sim_{\mathbb{R}} \Omega_{\text{dR}}^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 2$.

Conséquence

La cohomologie de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ détermine son type d'homotopie réel.

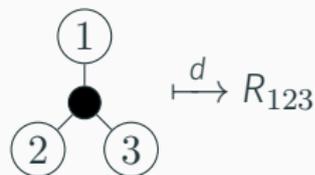
COMPLEXES DE GRAPHES DE KONTSEVICH

Relation d'Arnold : $R_{123} =$

$\omega_{12}\omega_{23} + \omega_{23}\omega_{31} + \omega_{31}\omega_{12}$

On peut représenter $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ par des combinaisons linéaires de graphes à k sommets modulo les relations R_{ijk}

\rightsquigarrow on rajoute des sommets « internes » aux graphes et une différentielle qui contracte les arêtes incidentes à ces sommets :



Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014 – Partie 1)

On obtient une CDGA quasi-libre $\mathbf{Graphs}_n(k)$ et un quasi-isomorphisme $\mathbf{Graphs}_n(k) \xrightarrow{\sim} H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$.

INTÉGRALES DE KONTSEVICH

Les relations sont satisfaites à homotopie près dans $\Omega^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$.
Comment trouver des représentants de manière systématique pour obtenir $\mathbf{Graphs}_n(k) \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$?

Soit $\varphi \in \Omega^{n-1}(\text{Conf}_2(\mathbb{R}^n))$ la forme volume.

Pour $\Gamma \in \mathbf{Graphs}_n(k)$ avec i sommets internes :

$$\omega(\Gamma) := \int_{\text{Conf}_{k+i}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)} \bigwedge_{(ij) \in E_\Gamma} \varphi_{ij}.$$

Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014 – Partie 2)

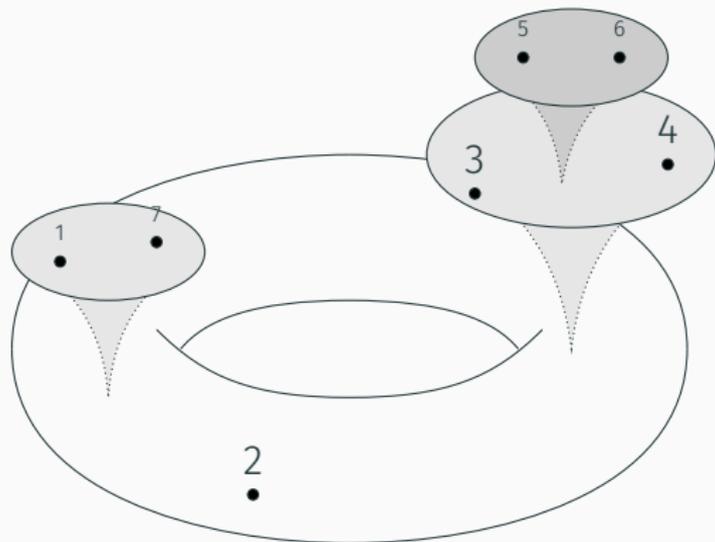
On obtient un quasi-isomorphisme $\omega : \mathbf{Graphs}_n(k) \xrightarrow{\sim} \Omega(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$.

△ Je triche ! Il faut compactifier $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ pour être sûr que \int converge et appliquer la formule de Stokes correctement...

COMPACTIFICATION

Problème : Conf_k n'est pas compact – pourquoi \int converge ?

Compactification de Fulton–MacPherson $\text{Conf}_k(M) \xrightarrow{\sim} \text{FM}_M(k)$

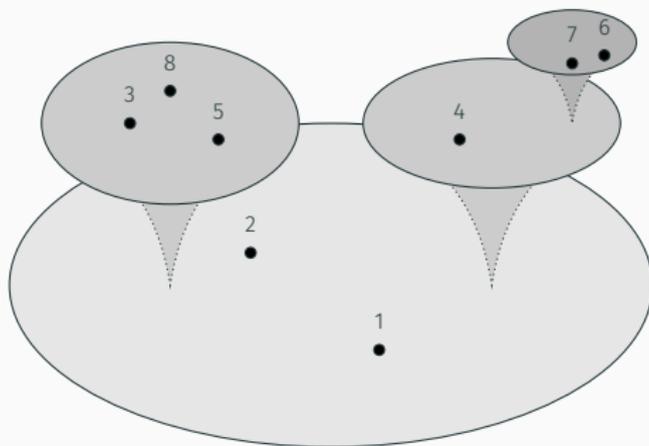


M compacte sans bord \implies variété semi-algébrique stratifiée $\dim = nk$

COMPACTIFICATION OF $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

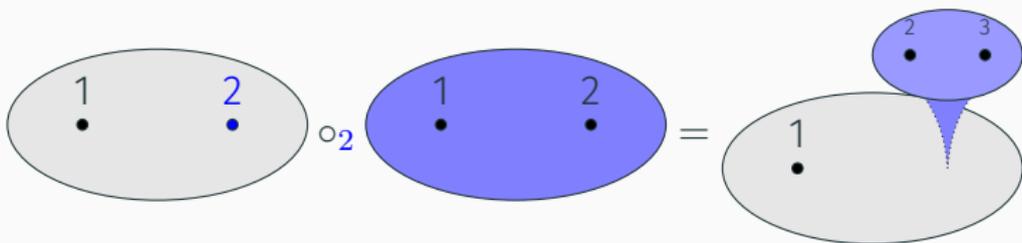
On doit normaliser $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ pour palier la non-compacité de \mathbb{R}^n :

$$\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)/(\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}) \xrightarrow{\sim} \text{FM}_n(k)$$



\implies variété semi-algébrique stratifiée $\dim = nk - n - 1$

Nouvelle structure sur \mathbf{FM}_n : c'est une **opérade** ! On peut « insérer » une configuration infinitésimale dans une autre :



$$\mathbf{FM}_n(k) \times \mathbf{FM}_n(l) \xrightarrow{o_i} \mathbf{FM}_n(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

Remarque

Même type d'homotopie que l'opérades des « petits disques ».

THÉORÈME COMPLET

Par functorialité, $H^*(\mathbf{FM}_n) = H^*(\mathbf{Conf}_\bullet(\mathbb{R}^n))$ et $\Omega^*(\mathbf{FM}_n)$ sont des coopérades. On vérifie que \mathbf{Graphs}_n aussi et que tout est compatible :

Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014)

L'opérade \mathbf{FM}_n est formelle sur \mathbb{R} :

$$\Omega^*(\mathbf{FM}_n) \xleftarrow[\omega]{\sim} \mathbf{Graphs}_n \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbf{FM}_n).$$

Formalité \implies conséquences importantes, p.ex. conjecture de Deligne, quantification par déformation des variétés de Poisson...

Remarque

$H_*(\mathbf{FM}_n)$ est l'opérade des n -algèbres de Poisson pour $n \geq 2$.

LE MODÈLE DE LAMBRECHTS–STANLEY

M : variété compacte sans bord

$A \sim \Omega(M)$: CDGA qui encode le type d'homotopie de M

$\mathbf{G}_A(k)$: modèle (conjectural) de $\text{Conf}_k(M) = M^{\times k} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$
 $\Delta_{ij} \rightarrow := \{x_i = x_j\}$

- « Générateurs » : $A^{\otimes k}$ et les ω_{ij} de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$
- relation d'Arnold + symétrie
- $d\omega_{ij}$ tue le dual de $[\Delta_{ij}]$.

Exemples :

- $\mathbf{G}_A(0) = \mathbb{R}$ est un modèle de $\text{Conf}_0(M) = \{\emptyset\}$ ✓
- $\mathbf{G}_A(1) = A$ est un modèle de $\text{Conf}_1(M) = M$ ✓
- $\mathbf{G}_A(2) \sim A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ devrait être un modèle de $\text{Conf}_2(M) = M^2 \setminus \Delta$?
- $k \geq 3$: plus compliqué.

1969 [Arnold, Cohen] $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = \mathbf{G}_{H^*(D^n)}(k)$

1978 [Cohen–Taylor] suite spectrale qui démarre à $\mathbf{G}_{H^*(M)}$

~1994 Pour les variétés projectives complexes lisses (\implies Kähler) :

- [Kříž] $\mathbf{G}_{H^*(M)}(k)$ est un modèle de $\text{Conf}_k(M)$
- [Totaro] la SS de Cohen–Taylor s’effondre

2004 [Lambrechts–Stanley] modèle de $\text{Conf}_2(M)$ si $\pi_{\leq 2}(M) = 0$

~2004 [Félix–Thomas, Berceanu–Markl–Papadima] lien avec une SS de Bendersky–Gitler

2008 [Lambrechts–Stanley] $H^i(\mathbf{G}_A(k)) \cong_{\Sigma_k\text{-Vect}} H^i(\text{Conf}_k(M))$

2015 [Cordova Bulens] modèle de $\text{Conf}_2(M)$ si $\dim M = 2m$

PREMIÈRE PARTIE DU THÉORÈME

En généralisant la preuve de Kontsevich & Lambrechts–Volić :

Théorème (I. 2016)

Soit M une variété compacte, sans bord, simplement connexe et lisse.
Alors $\mathbf{G}_A(k)$ encode le type d'homotopie réel de $\text{Conf}_k(M)$.

Corollaires

$M \sim_{\mathbb{R}} N \implies \text{Conf}_k(M) \sim_{\mathbb{R}} \text{Conf}_k(N)$ pour tout k .

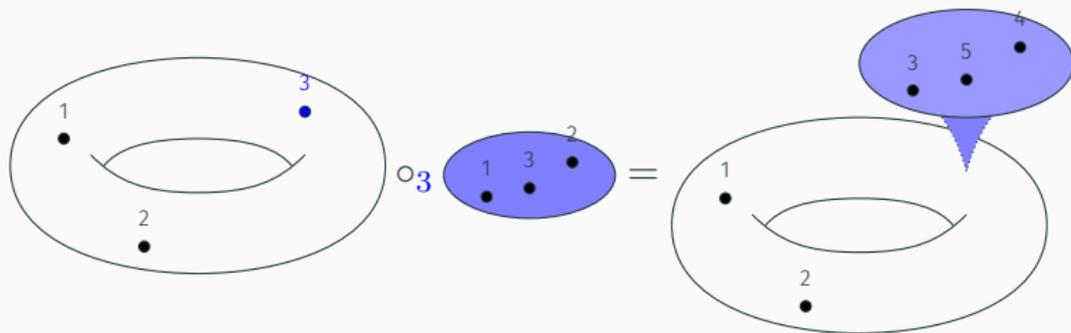
On peut « tout calculer » sur \mathbb{R} pour $\text{Conf}_k(M)$.

Remarque

$\dim M \leq 3$: seulement des sphères (conjecture de Poincaré) et on sait que \mathbf{G}_A est un modèle, mais adapter la preuve de Kontsevich pose des problèmes !

MODULES SUR LES OPÉRADES

M parallélisée $\implies \mathbf{FM}_M = \{\mathbf{FM}_M(k)\}_{k \geq 0}$ est un \mathbf{FM}_n -module à droite :



On peut réécrire :

$$\mathbf{G}_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes H^*(\mathbf{FM}_n(k)))/\text{relations}, d)$$

Un peu de sottises abstraites :

Proposition

$\chi(M) = 0 \implies \mathbf{G}_A = \{\mathbf{G}_A(k)\}_{k \geq 0}$ est un $H^*(\mathbf{FM}_n)$ -comodule à droite.

VERSION COMPLÈTE DU THÉORÈME

Théorème (I. 2016)

M : variété compacte, sans bord, simplement connexe, lisse, $\dim M \geq 4$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_R & \dashrightarrow^{\sim} & \Omega_{\mathbb{P}^A}^*(\mathbf{FM}_M) \\ \circlearrowleft^\dagger & & \circlearrowleft^\dagger & & \circlearrowleft^\ddagger \\ H^*(\mathbf{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\mathbb{P}^A}^*(\mathbf{FM}_n) \end{array}$$

† si $\chi(M) = 0$

‡ si M est parallélisée

$$A \xleftarrow{\sim} R \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{P}^A}^*(M)$$

Conclusion

Non seulement on a un modèle pour chaque $\text{Conf}_R(M)$, mais on a une structure plus riche si on les regarde tous ensembles.

APPLICATIONS

Le modèle de Lambrechts–Stanley est petit et explicite

⇒ calculs possibles

- Espaces de plongements.

Schématiquement, $\text{Emb}(M, N) \sim \text{Mor}_{\text{Conf}_\bullet(\mathbb{R}^n)}^h(\text{Conf}_\bullet(M), \text{Conf}_\bullet(N))$
[Boavida–Weiss, Turchin].

- Homologie de factorisation (espèce d'homologie où \otimes remplace \oplus).

Schématiquement, $\int_M A \sim \text{Conf}_\bullet(M) \otimes_{\text{Conf}_\bullet(\mathbb{R}^n)}^h A$ [Francis].

Théorème (I. 2018, voir aussi Markarian 2017, Döppenschmidt 2018)

M variété compacte, sans bord, simplement connexe et lisse ($\dim \geq 4$),

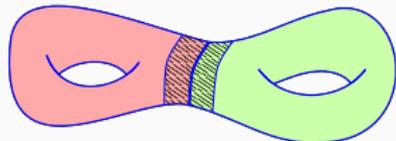
$$A = \mathcal{O}_{\text{poly}}(T^*\mathbb{R}^d[1-n]) \implies \int_M A \sim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}.$$

GÉNÉRALISATIONS

Théorème (Campos–I.–Lambrechts–Willwacher 2018)

Variétés à bord : invariance homotopique + généralisation du modèle de Lambrechts–Stanley (et plus!) sous de bonnes conditions, notamment $\dim M \geq$ borne.

Permet de calculer Conf_k par « récurrence ».



Théorème (Campos–Ducoulombier–I.–Willwacher 2018)

Modèle pour les espaces de configuration « à repère » : structure opéradique même si la variété n'est pas parallélisée.

Permet de calculer les espaces de plongements et l'homologie de factorisation pour des variétés plus générales.

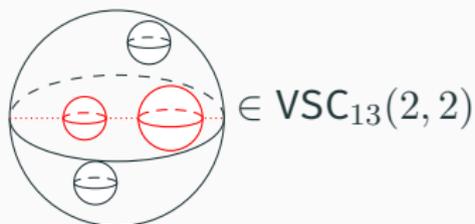
COMPLÉMENTAIRES DE SOUS-VARIÉTÉS

Projet en cours : calculer les espaces de configuration d'un complémentaire $N \setminus M$ où $\dim N - \dim M \geq 2$.

Motivation : conjecture d'Ayala–Francis–Tanaka

Complémentaire de nœud \rightsquigarrow : l'homologie de factorisation associée serait liée(?) à l'homologie de Khovanov.

Il existe une opérade \mathbf{VSC}_{mn} qui modélise la situation locale $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$:



Théorème (I. 2018)

L'opérade \mathbf{VSC}_{mn} est formelle sur \mathbb{R} .

MERCI DE VOTRE ATTENTION !

CES DIAPOS : <https://idrissi.eu/fr>