Homotopie des espaces de configuration

1 Espaces de configuration

Objet d'étude :

$$\mathrm{Conf}_r(X) = \{(x_1, \ldots, x_r) \in X^{\times r} \mid \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\}.$$

Ils ont de nombreuses applications, en mathématiques et dans la vie :

- groupes de tresses ;
- espaces de lacets ;
- espaces de modules de courbes complexes ;
- cohomologie de Gelfand–Fuks $H^*_{cont}(\Gamma_c(M\,, TM))$;
- type d'homotopie stable de $\mathrm{Map}(A\,, X)$;
- particules en mouvement en physique mathématique ;
- planification de trajets.

Question centrale : si une variété M se déforme en une variété N, est-ce que $\mathrm{Conf}_r(M)$ se déforme en $\mathrm{Conf}_r(N)$? Quelques rappels pour formaliser ça :

Définition. $f\,, g : X \to Y$ sont homotopes si $\exists H : X \times [0\,, 1] \to Y$ tq $H(-\,, 0) = f$ et $H(-\,, 1) = g$.

Définition. Une équivalence d'homotopie est une application inversible à homotopie près.

On peut reformuler la question : s'il existe une équivalence d'homotopie $f : M \to N$, existe-t'il une équivalence d'homotopie $\mathrm{Conf}_r(M) \to \mathrm{Conf}_r(N)$?

On voit très rapidement que la réponse est non. Par exemple, $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ alors que $\mathrm{Conf}_2(*) = \varnothing$. Il faut raffiner la question. Le contre-exemple fait intervenir des variétés non-compactes. Est-ce que cela est vrai pour les variétés compactes ?

Théorème (Longoni–Salvatore 2006)**.** *Il existe deux variétés compactes sans bord $M\,, N$ de dimension 3 telles que $M \sim N$ mais $\mathrm{Conf}_r(M) \not\sim \mathrm{Conf}_r(N)$ pour $r \geq 2$.*

Le contre-exemple est donné par des espaces lenticulaires $S^3/(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$. Ce contre-exemple n'est pas simplement connexe...

Conjecture. *Soit $M\,, N$ deux variétés compactes sans bord simplement connexe. Si $M \sim N$ alors $\mathrm{Conf}_r(M) \sim \mathrm{Conf}_r(N)$.*

Cette conjecture n'est pas sans fondements. On sait que le type d'homotopie de $\Omega\,\mathrm{Conf}_r(M)$ ne dépend que de celui de M [Levy]. On sait aussi que le type d'homotopie stable de $\mathrm{Conf}_r(M)$ ne dépend que de celui de M [Aouina–Klein]. De plus, le type d'homotopie de $\mathrm{Conf}_r(M \times \mathbb{R})$ ne dépend que de celui de M (pour une variété compacte sans bord).

2 Homotopie rationnelle

Il existe deux types d'exposés : ceux avec $p > 0$ et ceux avec un corps de caractéristique zéro. Ceci est un exposé du deuxième type.

Un groupe abélien de type fini se scinde en sa partie libre et la somme de ses parties de p-torsion pour p premier. Il existe une théorie similaire au niveau des espaces topologiques : à homotopie près, un espace topologique se « scinde » comme le produit d'un espace rationnel avec un produit d'espaces p-complets pour $p > 0$ [théorème du carré arithmétique de Sullivan]. Dans toute la suite, je vais me concentrer sur l'étude de la partie rationnelle des espaces topologiques.

Il existe une théorie très jolie pour étudier les espaces rationnellement de manière algébrique. Commençons déjà par définir quand deux espaces ont la même partie libre.

À partir de maintenant, on se concentre sur les espaces simplement connexes.

Définition. Soit X un espace. Son $n$ième groupe d'homotopie est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $S^n \to X$, muni d'une certaine structure de groupe abélien. Une équivalence d'homotopie faible est une application f tq $\pi_*(f)$ est un isomorphisme.

Sous de bonnes conditions, une équivalence d'homotopie faible est une équivalence d'homotopie.

Définition. Une équivalence d'homotopie rationnelles est une application t.q. $\pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme.

Définition. On dit que $X \sim_{\mathbb{Q}} Y$ s'il existe un zigzag d'équivalences d'homotopie rationnelles $X \leftarrow \cdots \to Y$.

Comment détecter que deux espaces sont rationnellement équivalents ? On peut utiliser la théorie de Sullivan, qui ramène tout à un problème purement algébrique.

Définition. Une algèbre différentielle graduée commutative (ADGC) est un espace vectoriel gradué A muni d'un produit $A \otimes A \to A$ et d'une différentielle $d \colon A \to A$ + axiomes. En particulier $xy = (-1)^{xy} yx$.

Définition. Soit $d \geq 0$. L'ADGC des formes polynomiales sur le simplexe est :

$$\Omega^*_{PL}(\Delta^d) = S(t_0, \ldots, t_d, dt_0, \ldots, dt_d)/(\sum t_i = 1,\ \sum dt_i = 0).$$

Définition. Soit X un espace triangulé. L'ADGC des formes polynomiales par morceaux sur X consiste en les collections de formes sur chacun des simplexes qui constituent X et qui se recollent bien sur les bords.

Par exemple, sur un tétrahèdre...

Définition. Un quasi-isomorphisme d'ADGC est un morphisme qui induit un isomorphisme en cohomologie. Deux ADGC sont quasi-isomorphes s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes entre les deux.

On peut montrer que $\Omega^*_{PL}(X) \sim C^*(X)$ comme ADG.

Théorème (Sullivan)**.** *Deux espaces simplement connexes de type fini X , Y sont rationnellement équivalents si et seulement si $\Omega^*_{PL}(X)$ et $\Omega^*_{PL}(Y)$ sont quasi-isomorphes.*

Définition. Un modèle (de Sullivan) de X est une ADGC quasi-isomorphe à $\Omega^*_{PL}(X)$.

Un modèle connaît donc tout sur le type d'homotopie rationnelle de X. On peut faire plein de calculs avec : la cohomologie du modèle est la cohomologie de X, le cup produit est le bon, la cohomologie de Harrison du modèle calcule $\hom(\pi_*(X) , \mathbb{Q})$, etc.

3 Retour sur les espaces de configuration

Conjecture. *Soit M, N deux variétés compactes sans bord simplement connexe. Si $M \sim_{\mathbb{Q}} N$ alors* $\mathrm{Conf}_r(M) \sim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Conf}_r(N)$.

Brique de base des variété : $\mathbb{R}^n$. On sait calculer la cohomologie de ses espaces de configuration, essentiellement par récurrence ($\deg \omega_{ij} = n-1$) :

$$H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n)) = \frac{S(\omega_{ij})_{1 \le i \ne j \le r}}{\left(\omega_{ij}^2 = 0, \omega_{ji} = (-1)^n \omega_{ij}, \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0\right)}.$$

Théorème (Arnold)**.** *L'espace* $\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2)$ *est* formel *:* $H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2)) \sim_{\mathbb{C}} \Omega^*_{dR}(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2); \mathbb{C})$.

Démonstration. On a un morphisme direct $\omega_{ij} \longmapsto d\log(z_i - z_j)$. □

Théorème (Kontsevich)**.** *Pour tout n et tout r,* $\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n)$ *est formel.*

La preuve fait intervenir des intégrales sur des versions compactifiées des espaces de configuration pour trouver des formes qui annulent les relations d'Arnold.

Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe. Soit A un modèle à « dualité de Poincaré » de M. Lambrechts–Stanley ont défini une ADGC (qui généralise des modèles antérieurs de Cohen–Taylor, Bendersky–Gitler, Kriz...) :

$$\mathsf{G}_A(r) := \left(\frac{A^{\otimes r} \otimes H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n))}{(p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij})}, d\omega_{ij} = \Delta_{ij} \right)$$

Théorème (I.)**.** *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe lisse. Alors $\mathsf{G}_A(r)$ est un modèle* réel *de* $\mathrm{Conf}_r(M)$.

Corollaire (I., Campos–Willwacher)**.** *Soit M, N deux variétés compactes sans bord lisses simplement connexe. Si $M \sim_{\mathbb{R}} N$ alors* $\mathrm{Conf}_r(M) \sim_{\mathbb{R}} \mathrm{Conf}_r(N)$.

4 Homologie de factorisation

On cherche à obtenir un invariant « fin » des variétés. L'idée suivante vient des TQFT.

On regarde les espaces de configuration de points dans M. Chaque point est décoré par un élément un monoïde commutatif A. Quand deux points se rencontrent, ils fusionnent et leurs décorations s'additionnent. Quand un point est décoré par l'unité, il disparaît.

Si on regarde la collection de toutes ces configurations, munie d'une topologie adapté, on obtient un espace qui s'appelle l'homologie de factorisation de M à coefficients dans A, noté $\int_M A$. Comme A est un simple monoïde commutatif, l'objet obtenu n'est pas très fin : il ne dépend que de $H_*(M)$ et calcule l'homologie de Hochschild supérieure de M à coefficients dans A. Quelques exemples : $\int_{\mathbb{R}^n} A = A$, $\int_{S^1} A = BA$, $\int_{S^n} A = B^n A$.

Pour avoir un invariant plus fin, il faut utiliser des coefficients « moins commutatifs ». Par exemple en dimension 1, on peut se satisfaire de coefficients seulement associatifs. En dimension 2, c'est commutatif, mais il y a un truc qui se rappelle de ce qui se passe quand un point tourne autour d'un autre. Comment modéliser ça ?

On utilise le concept d'opérade. Les opérades datent des années 60–70 et étaient utilisées pour les espaces de lacets itérés. Une des familles les plus importantes des opérades sont celles des petits disques. On introduit ici une variante.

$$\mathsf{Disk}_n(k) = \mathrm{Emb}\Big(\bigsqcup^{k} \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\Big).$$

La structure opéradique est la composition des plongements (dessin). Variante : Disk_n^{fr}, notamment $\mathsf{Disk}_n^{fr}(k) \simeq \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$.

Théorème (Tamarkin, Kontsevich, Lambrechts–Volić, Petersen, Fresse–Willwacher, Boavida–Horel)**.** *L'opérade Disk_n^{fr} est formelle sur $\mathbb{Q}$: sa cohomologie contrôle son type d'homotopie.*

Si M est une variété parallélisée :

$$\mathsf{Disk}_M^{fr}(k) = \mathrm{Emb}^{fr}\Big(\bigsqcup^{k} \mathbb{R}^n, M\Big).$$

C'est un « module à droite » sur Disk_n^{fr}. On a $\mathsf{Disk}_M^{fr}(k) \simeq \mathrm{Conf}_k(M)$.

Théorème (I.)**.** *Le modèle de Lambrechts–Stanley est un comodule sur $H^*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$ et cette structure encode le type d'homotopie de Disk_M^{fr}.*

L'homologie de factorisation d'une variété parallélisée M à coefficient dans une Disk_n^{fr}-algèbre A peut se définir comme une grosse colimite qui fait intervenir Disk_n^{fr} et Disk_M^{fr}.

Example de calcul : $C_*(\int_M U_n(\mathfrak{g})) \simeq C_*^{CE}(A^{n-*} \otimes \mathfrak{g})$.