

Mémoire de Master 2 en Mathématiques Fondamentales

Homologie et complexes de déformations d'opérades E_n

Najib IDRISSE KAÏTOUNI
Sous la direction de Benoit FRESSE*

11 juin 2014



*Professeur à l'Université Lille 1

Table des matières

Introduction	iv
1 Opérades	1
1.1 Catégories monoïdales symétriques	1
1.2 \mathfrak{S} -modules	2
1.3 Opérades	3
1.3.1 Définition	4
1.3.9 Algèbres sur une opérade	6
1.3.20 Modules sur une opérade	7
1.4 Opérades spécifiques	9
1.4.1 Algèbres de Poisson et de Gerstenhaber	9
1.4.9 Opérade des petits disques	10
2 Calcul de l'homologie de Gerstenhaber	15
2.1 Catégories modèles	15
2.2 Homologie des algèbres sur une opérade	18
2.2.1 Représentations des algèbres sur une opérade	18
2.2.5 Dérivations	18
2.2.8 Définition de l'homologie opéradique	19
2.2.11 Homologies de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg	21
2.3 Définition du complexe	22
2.3.1 Complexes bar itérés	22
2.3.13 Homologie de Poisson	24
2.3.20 Le complexe	25
3 Validation de la construction du complexe	27
3.1 Cas des coefficients triviaux	27
3.2 Cas $M = \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ et A libre	28
3.2.2 Définition du morphisme	28
3.2.8 Définition de la filtration et de la suite spectrale	29
3.2.16 Calcul de $E^1C(A)$	30
3.2.21 ψ est un quasi-isomorphisme	31
3.3 Passage aux algèbres cofibrantes	32
3.4 Coefficients quelconques	33
3.4.1 Résolution cofibrante	33
3.4.17 Coefficients	35

4	Extension de la construction du complexe	36
4.1	Bimodules abéliens	36
4.2	Idée du chapitre	37
4.3	Définition des différentielles	38
4.3.1	Bord de Hochschild	38
4.3.13	Annexe : b et e^1 commutent	39
4.3.16	Différentielle de Chevalley-Eilenberg	41
5	Lien avec le complexe de déformations	43
5.1	Dualité de Koszul	43
5.2	Complexes de déformations	44
5.2.1	Algèbres à homotopie près	44
5.2.4	Définition des complexes de déformations	45
5.2.11	Lien avec la cohomologie opéradique	46
5.3	Adaptation de la preuve	47
5.3.3	Coefficients triviaux	48
5.3.4	Coefficients universels	48
5.3.6	Algèbres cofibrantes	48
5.3.7	Coefficients quelconques	48
6	Applications	50
6.1	Complexes de graphes	50
6.2	Espaces de fonctions et homotopie	50
6.2.1	Ensembles simpliciaux	50
6.2.15	Application de la cohomologie de Gerstenhaber	52
6.3	Longs noeuds	55
6.4	Autres applications	56
	Notations	57
	Index	59
	Bibliographie	60

Introduction

Les opérades sont des structures, introduites à la fin des années 60 [Mac65 ; BV68], qui servent à encoder d'autres structures algébriques : algèbres associatives, commutatives, de Lie, de Poisson, de Gerstenhaber... Elles fournissent un cadre unifié pour décrire ce qu'est un « type d'algèbre » ou une « théorie algébrique ». Ce sont des monades particulières, combinatoires, qui permettent de réaliser des calculs effectifs.

Leurs applications en topologie algébrique et en algèbre homologique sont nombreuses. On peut par exemple citer le principe de reconnaissance des espaces de lacets [May72], la formalisation de ce qu'est une algèbre « homotopie près » [Mar04], la quantification par déformation [Kon99 ; Tam98], la conjecture de Deligne [KS00 ; MS02], ou encore la modélisation des catégories d'ordre supérieur [Bat98 ; Lei04].

Certaines opérades topologiques, les opérades E_n , jouent un rôle central dans beaucoup de ces applications. Elles sont étroitement liées aux opérades encodant des structures algébriques « classiques », les algèbres de Poisson et de Gerstenhaber. L'étude des théories cohomologiques associées à ces opérades est particulièrement intéressante, comme nous le verrons.

La construction bar, définie au départ pour les algèbres associatives, est un outil introduit dans les années 50 [EM53 ; CE56] qui sert à construire des résolutions. Elle a depuis été adaptée à de nombreuses situations : monoïdes topologiques, monades, opérades... Plusieurs travaux [Fre06 ; Fre11] montrent l'existence d'un lien important entre, d'une part, la cohomologie de Poisson et la cohomologie E_n , et d'autre part, la construction bar (itérée). En effet, on sait que l'on peut donc itérer la construction bar aux algèbres commutatives – et cela s'étend aux algèbres E_n . Appliquée aux algèbres de Poisson, elle permet de calculer leur cohomologie.

Le but principal de ce mémoire est alors de définir un complexe qui calcule, au travers de la construction bar itérée, la cohomologie des algèbres de Gerstenhaber et des complexes de déformations associés.

Plan

Le chapitre 1 donne les définitions des opérades, de leurs algèbres et de leurs modules, et introduit les opérades particulières mentionnées plus tôt (E_n , Poisson, Gerstenhaber).

Le chapitre 2 donne la définition générale de la (co)homologie des algèbres sur une opérade et de leurs représentations, et explicite une première version du complexe ; le chapitre 3 constitue la partie technique du mémoire, et montre que le complexe calcule effectivement la cohomologie de Gerstenhaber.

Le chapitre 4 étend la définition du complexe à un cadre plus général, celui des bimodules abéliens sur l'opérade de Gerstenhaber. Enfin, le chapitre 5 montre que ce

nouveau complexe étendu calcule l'homologie du complexe de déformations associé, que l'on peut voir également comme la cohomologie de Gerstenhaber.

Le dernier chapitre donne des applications possibles : le lien avec les complexes de graphes qui apparaissent dans la littérature, les espaces de longs nœuds, les espaces de fonctions...

Remerciements

Je tiens d'abord à vivement remercier Benoit Fresse, pour tout le soutien et l'aide qu'il m'a apportés durant la rédaction de ce mémoire. Je voudrais également remercier le laboratoire Paul Painlevé, pour son environnement propice au travail. Enfin, j'aimerais remercier ceux qui m'ont accompagné cette année, et ceux qui m'ont aidé à relire ce mémoire.

1 Opérades

1.1 Catégories monoïdales symétriques

Pour définir les opérades, nous avons besoin de la notion de catégories monoïdales symétriques au-dessus d'une base. Fixons d'abord les notations pour les catégories :

Définition 1.1.1. Une **catégorie** (localement petite) \mathcal{C} est la donnée :

- d'une classe d'objets encore notée \mathcal{C} ;
- pour toute paire d'objets $x, y \in \mathcal{C}$, d'un ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de morphismes entre x et y ;
- pour tout objet $x \in \mathcal{C}$, un élément « identité » $id_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$;
- de compositions $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ associatives et unitaires.

Les notions de foncteurs, transformations naturelles... sont les notions habituelles.

Définition 1.1.2. Une **catégorie monoïdale symétrique** est une catégorie \mathcal{C} munie d'un bifoncteur :

$$(1.1.3) \quad \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

et d'un objet $1 \in \mathcal{C}$ vérifiant les relations d'unité, d'associativité, de symétrie :

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} 1 \otimes A &\cong A \otimes 1 \cong A \\ (A \otimes B) \otimes C &\cong A \otimes (B \otimes C) \\ A \otimes B &\cong B \otimes A \end{aligned}$$

Les isomorphismes en question vérifiant les équations de cohérence du pentagone, de l'hexagone et du triangle – voir MAC LANE [Mac98] pour des diagrammes explicites.

Exemple 1.1.5. La catégorie des ensembles, et plus généralement toute catégorie cartésienne fermée forme une catégorie monoïdale symétrique, en prenant pour unité l'objet terminal et pour produit tensoriel le produit catégorique.

Soit \mathbb{k} un corps fixé, de caractéristique nulle. Nous allons considérer la catégorie des **dg-modules sur \mathbb{k}** . Elle a pour objets les modules (espaces vectoriels en réalité) sur \mathbb{k} gradués $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ munis d'une différentielle $d : A_n \rightarrow A_{n-1}$ de degré -1 (homologique). Les morphismes sont les applications linéaires respectant la graduation et compatibles avec les différentielles. On notera par la suite \mathcal{C} cette catégorie (sauf mention contraire). Le produit tensoriel est donné par :

$$(1.1.6) \quad (A \otimes B)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$$

On adopte la convention de Koszul pour les signes : $x \otimes y \leftrightarrow (-1)^{|x||y|} y \otimes x$, où $|x|, |y|$ sont les degrés respectifs de x et y . Les signes apparaissant de cette manière seront notés \pm .

Cette catégorie est complète et cocomplète : toutes les (petites) limites et colimites existent. Le produit tensoriel préserve les colimites :

$$(1.1.7) \quad \varinjlim (C_i \otimes D) \xrightarrow{\cong} (\varinjlim C_i) \otimes D$$

Si A est un dg-module, on note ΣA sa suspension. C'est un nouveau dg-module :

$$(1.1.8) \quad \begin{cases} (\Sigma A)_n = A_{n-1} \\ d_{\Sigma A} = -d_A \end{cases}$$

Définition 1.1.9. Une **catégorie monoïdale symétrique au-dessus d'une base \mathcal{C}** est une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{E}, \otimes, 1)$ munie d'un produit tensoriel externe $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ vérifiant $(\forall A, B \in \mathcal{C}, \forall X, Y \in \mathcal{E})$:

$$(1.1.10) \quad \begin{aligned} 1 \otimes X &\cong X \\ (A \otimes B) \otimes X &\cong A \otimes (B \otimes X) \\ A \otimes (X \otimes Y) &\cong (A \otimes X) \otimes Y \cong X \otimes (A \otimes Y) \end{aligned}$$

Les isomorphismes en question vérifient certaines équations de cohérence (pentagone, hexagone, triangle).

On peut bien sûr prendre $\mathcal{C} = \mathcal{E}$, mais il existe d'autres exemples. Par la suite, toutes les catégories monoïdales seront au-dessus de \mathcal{C} donné. Le produit tensoriel externe est supposé préserver les colimites, et nous supposons qu'il existe un bifoncteur Hom externe $\mathcal{E}^{op} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$, noté toujours $\text{Hom}_{\mathcal{E}}$ (ici cela ne portera pas à confusion). En d'autres termes, \mathcal{E} est enrichie sur \mathcal{C} [Kel82].

1.2 \mathfrak{S} -modules

Définition 1.2.1. Un **\mathfrak{S} -module** (différentiel gradué) M est une suite $\{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de dg-modules $M(n) \in \mathcal{C}$, chaque $M(n)$ étant muni d'une action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . On note \mathcal{M} la catégorie des \mathfrak{S} -modules, les morphismes étant les suites d'application équivariantes.

De manière équivalente, $\mathcal{M} = \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$ où \mathfrak{S} est la catégorie ayant pour objets les entiers $n = \{1, \dots, n\}$ et pour morphismes les applications bijectives.

La catégorie \mathcal{M} est un exemple de catégorie monoïdale symétrique sur \mathcal{C} :

- Le produit tensoriel externe $A \otimes M$ est simplement donné par $(A \otimes M)(n) = A \otimes M(n)$, où \mathfrak{S}_n agit trivialement sur le premier facteur ;

— Le produit tensoriel interne $M \otimes N$:

$$(1.2.2) \quad (M \otimes N)(n) = \bigoplus_{p+q=n} \mathfrak{S}_n \otimes_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} M(p) \otimes N(q)$$

où $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ s'injecte dans \mathfrak{S}_{p+q} en décomposant $\{1, \dots, p+q\}$ en $\{1, \dots, p\} \sqcup \{p+1, \dots, p+q\}$, puis agit par translation à droite sur \mathfrak{S}_{p+q} . L'unité :

$$(1.2.3) \quad 1(n) = \begin{cases} \mathbb{k} & n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit \mathcal{E} une catégorie monoïdale symétrique au-dessus de \mathcal{C} . Un \mathfrak{S} -module M induit un foncteur $S(M)$ appelé **foncteur de Schur** (dont la signification deviendra claire par la suite) :

$$(1.2.4) \quad S(M) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$V \mapsto S(M, V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} (M(r) \otimes V^{\otimes r})_{\mathfrak{S}_r}$$

La notation $(\cdot)_{\mathfrak{S}_r}$ désignant les coinvariants : si X est un G -module, $X_G = X/\{gx - x\}$. On note aussi $(A \otimes B)_{\mathfrak{S}_n} = A \otimes_{\mathfrak{S}_n} B$. Un élément de $S(M, V)$ sera génériquement noté $\xi(x_1, \dots, x_r)$, où $\xi \in M(r)$ et $x_i \in V$.

Des considérations générales catégoriques (voir FRESSE [Fre09]) impliquent que la composition de deux foncteurs $S(M) \circ S(N)$ est représentée par un nouveau \mathfrak{S} -module $M \circ N$. Explicitement :

$$(1.2.5) \quad M \circ N = \bigoplus_{r=0}^{\infty} M(r) \otimes_{\mathfrak{S}_r} N^{\otimes r}$$

Le premier produit tensoriel est externe $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ alors que $N^{\otimes r}$ est interne à \mathcal{M} . En fait, \circ munit \mathcal{M} d'une nouvelle structure de catégorie monoïdale symétrique sur \mathcal{C} , avec comme unité I :

$$(1.2.6) \quad I = \begin{cases} \mathbb{k} & n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.3 Opérades

Une opérade est un objet qui encode des structures algébriques telles que « algèbre de Lie » ou « algèbre associative unitaire ». Elle est constituée d'opérations avec une sortie et plusieurs entrées (en particulier les opérations 0-aires sont des constantes de structure, eg. l'unité d'une algèbre). Ces opérations peuvent être composées entre elles, et elles vérifient certaines relations : associativité, commutativité... Un intérêt principal des opérades réside dans leurs « représentations », aussi appelées algèbre sur l'opérade, et qui correspondent aux représentations des algèbres associatives unitaires.

Le terme « opérade » a été introduit par MAY [May72], mais des notions similaires existaient déjà : les analyseurs de LAZARD [Laz55], les PROP de MAC LANE [Mac65], ou encore dans les travaux de BOARDMAN et VOGT [BV68]. On peut trouver un historique des opérades par MARKL, SHNIDER et STASHEFF [MSS02] et LEINSTER [Lei04].

Nous ne parlons ici que d'opérades *symétriques* : les groupes symétriques \mathfrak{S}_n agissent sur les opérations en permutant leurs entrées. Une version non symétrique des opérades existe également, en oubliant dans les définitions toutes les références aux groupes symétriques. De nombreuses autres versions des opérades existent : opérades colorées (aussi appelées multicatégories), propérades, n -opérades, etc.

1.3.1 Définition

Nous pouvons finalement donner la définition (concise) d'une opérade :

Définition 1.3.2. Une **opérade** est un monoïde interne à la catégorie monoïdale symétrique (\mathcal{E}, \circ, I) . Un morphisme d'opérades est un morphisme de monoïdes internes.

Par monoïde interne nous entendons un objet $M \in \mathcal{M}$ muni de deux opérations $\mu : M \circ M \rightarrow M$ et $\eta : I \rightarrow M$ vérifiant les axiomes d'associativité et d'unité. Nous noterons généralement \mathbf{P} ou \mathbf{Q} des opérades quelconques, et $\gamma : \mathbf{P} \circ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ le produit (appelé produit de composition).

Déroulons les définitions pour obtenir la définition originelle de MAY [May72] d'opérade (voir aussi LODAY et VALLETTE [LV12] et FRESSE [Fre09] pour des contextes autres que les espaces topologiques). Soit $(\mathbf{P}, \gamma, \eta)$ une opérade :

- L'unité $\eta : I \rightarrow \mathbf{P}$ correspond à un morphisme $\mathbb{k} \rightarrow \mathbf{P}(1)$, donc à un élément $1 = \eta(1) \in \mathbf{P}(1)$ (de degré zéro, de différentielle nulle) ;
- Le produit $\gamma : \mathbf{P} \circ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ correspond à une famille de morphismes :

$$(1.3.3) \quad \gamma : \mathbf{P}(r) \otimes \mathbf{P}(k_1) \otimes \dots \otimes \mathbf{P}(k_r) \rightarrow \mathbf{P}(k_1 + \dots + k_r)$$

Ces morphismes sont « équivariants » pour l'action des groupes symétriques (cf. les références pour des diagrammes explicites). On note généralement $\gamma(f; g_1, \dots, g_r) = f \circ (g_1, \dots, g_r)$, voire même simplement $f(g_1, \dots, g_r)$.

- L'axiome d'unité $\gamma(\cdot, \eta) = \gamma(\eta, \cdot) = id$ correspond aux équations :

$$(1.3.4) \quad 1 \circ f = f \qquad f \circ (1, \dots, 1) = f$$

- L'axiome d'associativité correspond à :

$$(1.3.5) \quad (f \circ (g_1, \dots, g_r)) \circ (h_{1,1}, \dots, h_{1,k_1}, \dots, h_{r,k_r}) = f \circ (g_1 \circ (h_{1,1}, \dots, h_{1,k_1}), \dots, g_r \circ (h_{r,1}, \dots, h_{r,k_r}))$$

Il est commode de représenter les éléments de l'opérade par des arbres. Ainsi $f \in \mathbf{P}(n)$ sera représenté par la figure 1.A. L'action du groupe symétrique se représente alors par la permutation des indices, et la composition par le greffage des arbres. Les axiomes des

opérades garantissent que la composition n'est pas ambiguë. En fait, on peut définir les opérades comme des algèbres sur la monade \mathbb{O} des opérades libres, qui peut se décrire à l'aide d'arbres ; les axiomes des opérades signifient donc exactement que l'on peut composer les arbres étiquetés par des éléments de l'opérade.

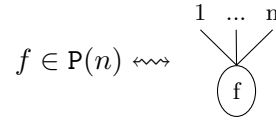


FIGURE 1.A – Représentation d'une opération comme un arbre

On note aussi souvent $f \circ_i g = f(1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1)$, où g apparaît à la i ème position. Par exemple l'équation (1.3.6) représente $f \circ (\tau_* g, 1)$ (τ est l'élément non trivial de \mathfrak{S}_2).

$$(1.3.6) \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad / \\ \textcircled{f} \end{array} \circ_1 \left(\tau_* \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad / \\ \textcircled{g} \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad / \\ \textcircled{g} \\ \diagdown \quad / \\ \textcircled{f} \end{array} \quad 3$$

Exemple 1.3.7. L'exemple prototypique d'opérade est l'**opérade des endomorphismes** End_X d'un objet $X \in \mathcal{E}$:

$$\text{End}_X(n) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(X^{\otimes n}, X)$$

La composition est la composition évidente des morphismes, et l'action du groupe symétrique est l'action à droite sur les variables d'entrée. Ici nous nous servons de la structure enrichie $\text{Hom}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}^{op} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ pour pouvoir définir l'opérade (sinon End_X serait seulement une opérade ensembliste).

C'est cet exemple qui explique comment interpréter les éléments constitutifs d'une opérade : les éléments de $\text{P}(n)$ sont des « opérations » à n entrées et une sortie (appelées opérations n -aires). L'opération $f \circ (g_1, \dots, g_n)$ correspond à la composition d'opérations, où l'on « branche » la sortie de g_i dans la i ème entrée de f . L'image 1 de η est l'opération identité, et l'action du groupe symétrique permute les entrées.

Exemple 1.3.8. Soit A une algèbre associative et unitaire. On peut lui associer une opérade P_A :

$$\text{P}_A(n) = \begin{cases} A & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

La seule composition non-triviale est $\circ : \text{P}_A(1) \otimes \text{P}_A(1) \rightarrow \text{P}_A(1)$, donnée par le produit dans A . L'unité est donnée $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$. On vérifie alors que P_A est une opérade.

1.3.9 Algèbres sur une opérade

Définition 1.3.10. Une **algèbre sur une opérade** P est un objet $A \in \mathcal{E}$ muni d'un morphisme $\Phi : P \rightarrow \text{End}_A$. La catégorie des algèbres sur P dans \mathcal{E} est notée ${}_P\mathcal{E}$

En clair, il s'agit donc d'un objet A muni d'endomorphismes multi-linéaires $\Phi(\xi) : A^{\otimes n} \rightarrow A$ pour chaque $\xi \in P(n)$ et qui vérifient les relations d'unité, d'associativité et d'équivariance venant de celles de P . Si A est une telle algèbre, on notera $\xi(a_1, \dots, a_n)$ pour $\Phi(\xi)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)$. Par adjonction, une telle structure est équivalente à une suite de morphismes $P(r) \otimes A^{\otimes r} \rightarrow A$, ie. un morphisme $S(P, A) = P \circ A \rightarrow A$.

Exemple 1.3.11. L'opérade P est une algèbre sur elle-même dans la catégorie \mathcal{M} (et même dans la catégorie \mathcal{M}_P des modules à droite sur P définie dans la section 1.3.20).

Exemple 1.3.12. Si A est une algèbre associative et unitaire, une algèbre sur P_A 1.3.8 est la même chose qu'une représentation (classique) de A . Les opérades sont en ce sens une généralisation des algèbres associatives, qui sont des monoïdes internes à la catégorie des (dg)-espaces vectoriels.

Exemple 1.3.13. Duale à l'exemple 1.3.7, on peut définir l'opérade des co-endo-morphismes Coend_X d'un objet $X \in \mathcal{E}$:

$$\text{Coend}_X(n) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, X^{\otimes n})$$

et γ est encore donné par la (post)-composition. Cette opérade sert à définir les *cogèbres* sur une opérade P .

Les algèbres libres sur P sont données par le foncteur de Schur :

$$(1.3.14) \quad \begin{aligned} S(P) : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ X &\mapsto P \circ X \end{aligned}$$

Elles sont définies par la relation universelle usuelle. On notera par la suite $P \circ X$ la P -algèbre libre engendrée par X . La donnée des algèbres libres permet de reconstruire entièrement l'opérade.

Exemple 1.3.15. Les notions classiques d'algèbres (associatives, de Lie...) sont des exemples d'algèbres sur une opérade. Donnons trois opérades classiques, définies par générateurs et relations (voir FRESSE [Fre09] et LODAY et VALLETTE [LV12]) :

— L'opérade commutative Com :

$$(1.3.16) \quad \text{Com} = \mathbb{O}(\mathbb{k}\mu) / (\mu(\mu, 1) = \mu(1, \mu))$$

où \mathfrak{S}_2 agit trivialement sur μ . Une algèbre sur Com est donc un dg-module (par exemple) A muni d'un morphisme $\cdot : A \otimes A \rightarrow A$ qui vérifie $b \cdot a = \pm a \cdot b$ (\mathfrak{S}_2 n'agit pas trivialement sur $A \otimes A$: c'est la convention de Koszul) et $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. C'est exactement la définition d'une dg-algèbre commutative.

On peut vérifier que $\text{Com}(n) = \mathbb{k}$ (avec une action triviale du groupe symétrique) pour $n > 0$.

— L'opétrade associative **Ass** :

$$(1.3.17) \quad \mathbf{Ass} = \mathbb{O}(\mathbb{k}\mu \oplus \mathbb{k}\bar{\mu}) / (\mu(\mu, 1) = \mu(1, \mu))$$

où $(12)_*\mu = \bar{\mu}$. On a alors que $\mathbf{Ass}(n) = \mathbb{k}[\mathfrak{S}_n]$ est la représentation régulière de \mathfrak{S}_n .

— L'opétrade de Lie **Lie** définie par (c'est la relation de Jacobi) :

$$(1.3.18) \quad \mathbf{Lie} = \mathbb{O}(\mathbb{k}\lambda) / ((1 + (123)_* + (132)_*)(\lambda(\lambda, 1)))$$

où $(12)_*\lambda = -\lambda$. Le module $\mathbf{Lie}(n)$ n'a pas une description simple : il correspond à la partie n -linéaire d'une base d'une algèbre de Lie libre.

Exemple 1.3.19. Les corps, par contre, ne peuvent pas être définis comme les algèbres sur une opétrade : l'axiome $\forall x, \exists y : xy = 1$ est celui qui pose problème. En effet, il serait par exemple tentant de vouloir définir les corps comme des algèbres commutatives possédant une opération supplémentaire ι d'arité 1 (l'inverse). Mais dans l'axiome qui stipule que c'est bien l'inverse, la variable x devrait apparaître deux fois : $\mu(x, \iota(x)) = 1$, ce qui n'est pas possible.

Cela ne prouve pas qu'il n'y a pas d'opétrade dont les algèbres soient les corps (il pourrait y avoir une autre description axiomatique acceptable), mais il n'y a pas d'objet initial dans la catégorie des corps. Or, dans la catégorie des algèbres sur \mathbf{P} , l'algèbre libre sur 0 est initiale.

1.3.20 Modules sur une opétrade

Parallèlement à la notion d'algèbre sur une opétrade, il y a la notion de module (à droite ou à gauche) sur une opétrade, développée par FRESSE [Fre09]. Il ne faut pas la confondre avec la notion de module sur une algèbre sur une opétrade (qui correspondent par exemple aux modules sur une algèbre commutative, ou aux représentations d'algèbres de Lie).

Définition 1.3.21. Un **module à gauche** sur l'opétrade \mathbf{P} est un \mathfrak{S} -module M muni d'une action de monoïde $\mathbf{P} \circ M \rightarrow M$. La catégorie des modules à gauche sur \mathbf{P} est notée ${}_p\mathcal{M}$. De manière symétrique, un **module à droite** sur \mathbf{Q} est un \mathfrak{S} -module N muni d'une action de monoïde $N \circ \mathbf{Q} \rightarrow N$. La catégorie est notée \mathcal{M}_q . Enfin, la catégorie des (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) -bimodules est notée ${}_p\mathcal{M}_q$.

Le fait que l'action soit une action de monoïde signifie que les diagrammes suivants (ou leurs symétriques pour les modules à droite) commutent :

$$(1.3.22) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{P} \circ \mathbf{P} \circ M & \xrightarrow{1 \circ \mu} & \mathbf{P} \circ M \\ \downarrow \gamma \circ 1 & & \downarrow \mu \\ \mathbf{P} \circ M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M = I \circ M & \xrightarrow{=} & M \\ \downarrow \eta \circ 1 & \nearrow \mu & \\ \mathbf{P} \circ M & & \end{array}$$

De manière équivalente (par adjonction) on peut spécifier les modules à gauche (resp. à droite) par des familles de morphismes :

$$(1.3.23) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(k) \otimes M(k_1) \otimes \dots \otimes M(k_r) &\rightarrow M(k_1 + \dots + k_r) \\ N(k) \otimes \mathbb{Q}(k_1) \otimes \dots \otimes \mathbb{Q}(k_r) &\rightarrow N(k_1 + \dots + k_r) \end{aligned}$$

Remarque 1.3.24. Il n'y a pas de surcharge de notation pour ${}_{\mathbb{P}}\mathcal{M}$, que l'on pourrait voir à la fois comme la catégorie des \mathbb{P} -algèbres dans $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ et la catégorie des \mathbb{P} -modules à gauche. En effet, par adjonction, un morphisme $\mathbb{P} \rightarrow \mathbf{End}_M$ est équivalent à une action $\mathbb{P} \circ M \rightarrow M$ pour $M \in \mathcal{M}$.

Plus généralement, une \mathbb{P} -algèbre dans \mathcal{E} est équivalente à un objet $M \in \mathcal{E}$ muni d'une action $S(\mathbb{P}, M) = \mathbb{P} \circ M \rightarrow M$.

Exemple 1.3.25. L'opérade \mathbb{P} elle-même définit un (\mathbb{P}, \mathbb{P}) -bimodule. C'est un point de vue assez important pour la suite.

Le produit de composition $\circ : \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est un produit tensoriel, avec pour unité I . Tout comme on peut construire un produit tensoriel relatif $M \otimes_A N$ dans la catégorie des modules (où M est un module à droite sur A et N un module à gauche), on peut également construire un objet noté $M \circ_{\mathbb{P}} N$ vérifiant des propriétés similaires. Plus généralement, on peut construire un foncteur de Schur relatif $S_{\mathbb{P}}(M)$, où M est un module à droite (et on aura alors $M \circ_{\mathbb{P}} N = S_{\mathbb{P}}(M, N)$).

Définition 1.3.26. Soit \mathbb{P} une opérade et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ un module à droite. Le **foncteur de Schur relatif** $S_{\mathbb{P}}(M) : {}_{\mathbb{P}}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, est défini par le coégaliseur (réflexif) :

$$(1.3.27) \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{s_0} & \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & \\ S(M \circ \mathbb{P}, A) & \xrightarrow{\text{coeq}} & S(M, A) \xrightarrow{\text{coeq}} S_{\mathbb{P}}(M, A) \end{array}$$

où

- d_0 est induit par l'action à droite de \mathbb{P} sur M ;
- $d_1 : S(M \circ \mathbb{P}, A) = S(M, S(\mathbb{P}, A)) \rightarrow S(M, A)$ est induit par l'action à gauche de \mathbb{P} sur A ;
- $s_0 : S(M, A) = S(M \circ I, A) \rightarrow S(M \circ \mathbb{P}, A)$ est induit par $\eta : I \rightarrow \mathbb{P}$

La réflexivité signifie ici que $d_0 s_0 = d_1 s_0$.

Les foncteurs ${}_{\mathbb{P}}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ du type $S_{\mathbb{P}}(M)$ seront importants par la suite et seront appelés « foncteurs induits par des modules à droite ». Par analogie avec le produit tensoriel, on note parfois $S_{\mathbb{P}}(M, A) = M \circ_{\mathbb{P}} A$. En particulier $S_I(M, V) \cong S(M, V)$ (tout \mathfrak{S} -module a une structure canonique unique de (I, I) -bimodule), et on note aussi $M \circ_I V = M \circ V$. Cette notation est cohérente avec la notation $\circ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, quand $\mathcal{E} = \mathcal{M}$.

1.4 Opérades spécifiques

1.4.1 Algèbres de Poisson et de Gerstenhaber

Un type d'algèbre qui va particulièrement nous intéresser est celui des algèbres de Poisson [Lic77 ; Fre06] (et leur version graduée, les algèbres de Gerstenhaber).

Définition 1.4.2. Une **algèbre de Poisson** A est un module muni d'un produit $\cdot : A \otimes A \rightarrow A$ et d'un crochet $\{, \} : A \otimes A \rightarrow A$ tels que :

- (A, \cdot) est une (dg) algèbre commutative ;
- $(A, \{, \})$ est une (dg) algèbre de Lie ;
- Le crochet de Poisson est une dérivation par rapport au produit, ie. il vérifie la *relation de Leibniz* :

$$(1.4.3) \quad \{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + (-1)^{|a||b|} b \cdot \{a, c\}$$

Pour illustrer la règle de Koszul, dans l'équation (1.4.3), \pm vaut $(-1)^{|a||b|}$ car a et b sont échangés. En fait, b est également échangé avec le crochet : on peut noter l'équation comme $\mu(a, \lambda(b, c)) = \mu(\lambda(a, b), c) + \pm \mu(b, \lambda(a, c))$ en notation opéradique. Cependant ici le crochet λ est de degré zéro, donc aucun signe n'apparaît. Ceci est à contraster avec les algèbres de Gerstenhaber, décrites dans quelques paragraphes.

Cette description des algèbres de Poisson donne naturellement une opérade, notée Poi , définie par deux générateurs λ (le crochet) et μ (le produit) et relations, telle que les Poi -algèbres soient exactement les algèbres de Poisson ; on peut trouver la construction dans GETZLER et JONES [GJ94] et MARKL [Mar96]. Le théorème suivant se trouve dans LODAY et VALLETTE [LV12] (et est expliqué par une loi distributive) :

Théorème 1.4.4. *L'opérade Poi est isomorphe à $\text{Com} \circ \text{Lie}$. En particulier l'algèbre de Poisson libre sur X est :*

$$\text{Poi}(X) \cong S(L(X))$$

Un début d'explication est donné par le fait que toute expression de Poisson peut se réduire à une expression de la forme $\pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_k$, où les π_i ne font intervenir que le crochet ; cela est dû à la relation de Leibniz.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Les algèbres de Poisson se généralisent en algèbres de Gerstenhaber :

Définition 1.4.5. Une **n -algèbre de Gerstenhaber** A est un module muni d'un produit \cdot et d'un crochet $[,]$ tels que :

- (A, \cdot) est une algèbre commutative ;
- $(A, [,])$ est une algèbre de Lie *de degré $n - 1$* : cela signifie que $(\Sigma^{1-n} A, [,])$ est une algèbre de Lie. En particulier le crochet diminue le degré de $n - 1$;
- La relation de Leibniz (1.4.3) (avec les signes découlant de la convention de Koszul) est vérifiée :

$$(1.4.6) \quad [a, b \cdot c] = [a, b] \cdot c + (-1)^{(|a|-n+1)|b|} b \cdot [a, c]$$

En particulier une algèbre de Poisson est une 1-algèbre de Gerstenhaber. On note \mathbf{Ger}_n l'opérade des n -algèbres de Gerstenhaber, encore décrite par générateurs (λ et μ) et relations [GJ94; Mar96].

Remarque 1.4.7. Dans la littérature, on appelle parfois les \mathbf{Ger}_2 -algèbres « algèbres de Gerstenhaber » et les \mathbf{Ger}_n -algèbres « n -algèbres de Poisson ».

Cette notion d'algèbre « de degré k » peut se définir au niveau opéradique. Étant donné une opérade \mathbf{P} , il existe une opérade $\Lambda\mathbf{P}$ telle que ΣA est une algèbre sur $\Lambda\mathbf{P}$ si et seulement si A est une algèbre sur \mathbf{P} (elle est notée \mathcal{S} par LODAY et VALLETTE [LV12]). Sur les algèbres libres, cette opérade est donnée par $(\Lambda\mathbf{P})(X) = \Sigma\mathbf{P}(\Sigma^{-1}X)$ (cela suffit d'ailleurs à décrire complètement $\Lambda\mathbf{P}$). On utilise aussi parfois la notation $\Lambda\mathbf{P} = \mathbf{P}[-1]$

Théorème 1.4.8. *L'opérade \mathbf{Ger}_n est isomorphe à $\mathbf{Com} \circ \Lambda^{1-n}\mathbf{Lie}$. En particulier la n -algèbre de Gerstenhaber libre sur X est :*

$$\mathbf{Ger}_n(X) \cong S(\Sigma^{1-n}L(\Sigma^{n-1}X))$$

1.4.9 Opérade des petits disques

L'opérade des petits disques, initialement introduite par BOARDMAN et VOGT [BV73] comme la PROP des petits cubes, est une opérade fondamentale en topologie algébrique. C'est une opérade *topologique* : la catégorie monoïdale de base \mathcal{C} est celle des espaces topologiques (pointés, à engendrement compact, séparés¹). Elle est décrite par MAY [May72]. On note $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i^2 \leq 1\}$ le disque unité fermé de \mathbb{R}^n .

Définition 1.4.10. Soit $1 \leq n < \infty$ un entier fixé. **L'opérade des petits n -disques** \mathbf{D}_n est :

- $\mathbf{D}_n(r)$ est l'espace des plongements $\overbrace{D^n \sqcup \dots \sqcup D^n}^{r \times} \rightarrow D^n$, affine sur chaque facteur ; cet espace est muni de la topologie compacte-ouverte. Un exemple d'élément est représenté dans la figure 1.B. À noter qu'un tel plongement est déterminé par les images des centres et les rayons des disques images.
- La composition est donnée par la composition des plongements, voir la figure 1.C.

Ici nous considérons la version non-unitaire de \mathbf{D}_n où $\mathbf{D}_n(0) = 0$. Il existe une version unitaire notée \mathbf{D}_{n+} .

Il existe un morphisme d'inclusion $\mathbf{D}_n \hookrightarrow \mathbf{D}_{n+1}$, donné par l'inclusion $D^n \hookrightarrow D^{n+1}$, $D^n \cong \{x \in D^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ pour les centres, et en gardant le même rayon à l'arrivée (figure 1.D).

Définition 1.4.11. **L'opérade des petits ∞ -disques** \mathbf{D}_∞ est la colimite $\varinjlim_n \mathbf{D}_n$.

1. Ces conditions sont nécessaires pour des questions catégoriques : la catégorie usuelle des espaces topologiques n'est pas fermée cartésienne.

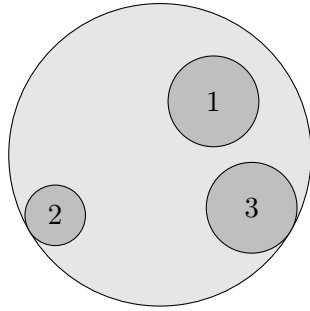


FIGURE 1.B – Élément de $D_2(3)$

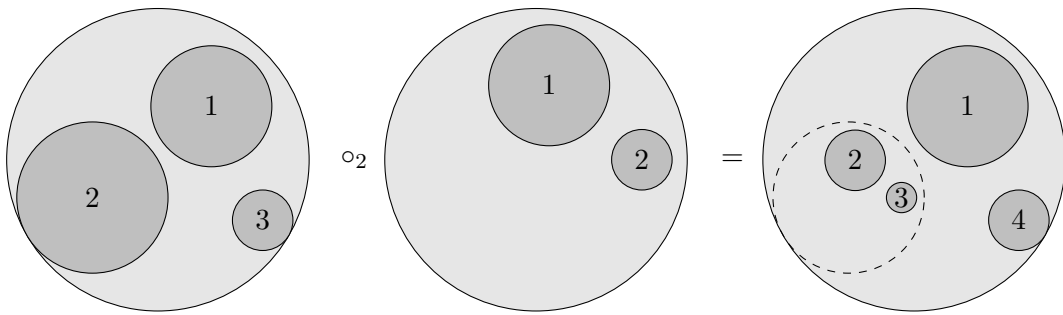


FIGURE 1.C – Composition dans D_2

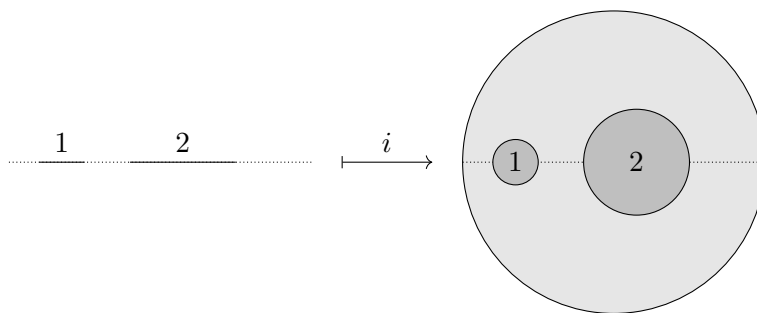


FIGURE 1.D – Inclusion de $D_1(2)$ dans $D_2(2)$

Les opérades E_n

L'opérade des petits disques n'est qu'un modèle parmi d'autres pour ce que l'on appelle les *opérades* E_n ; d'autres modèles sont parfois utiles.

Définition 1.4.12. Une **opérade** E_n est une opérade (topologique) \mathbf{P} cofibrante faiblement équivalente² à \mathbf{D}_n :

$$\mathbf{P} \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_n$$

Une algèbre sur une opérade E_n est appelée une E_n -algèbre.

Par exemple on peut remplacer l'opérade des petits disques par l'opérade des petits cubes \mathbf{C}_n , dont la définition se comprend facilement à partir de la figure 1.E.

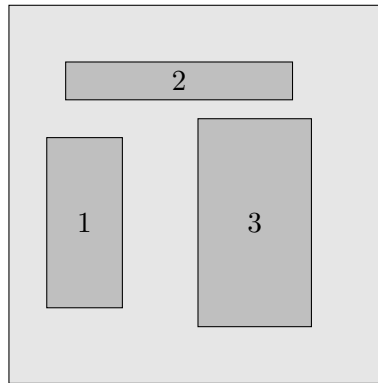


FIGURE 1.E – Opérade des petits cubes

Plus généralement il est possible de remplacer les disques et les cubes par des « petits corps convexes » [May77]. Ce résultat n'est pas complètement évident : les espaces intervenant dans les définitions sont bien sûr tous faiblement équivalents entre eux (en prenant les centres des disques / cubes / corps convexes, ils sont équivalents aux espaces de configurations (1.4.13)). La difficulté réside dans le fait d'obtenir des équivalences compatibles à la structure opéradique.

Un autre modèle est donné par l'*opérade de Fulton-MacPherson*, dont la description est plus complexe. Chaque espace $\mathbf{D}_n(r)$ a le type d'homotopie de $F(D^n, r)$, l'espace des configurations de r points dans D^n . Explicitement,

$$(1.4.13) \quad F(D^n, r) = \{(x_1, \dots, x_r) \in D^n \times \dots \times D^n \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$

L'équivalence $\mathbf{D}_n(r) \xrightarrow{\sim} F(D^n, r)$ associe à une configuration de disques la configuration correspondant aux centres des disques en question. L'espace $C(\mathbb{R}^n, r)$ (un espace faiblement équivalent à $F(D^n, r)$) :

$$C(\mathbb{R}^n, r) = F(\mathbb{R}^n, r) / \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n$$

2. Une équivalence faible d'opérades $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ est un morphisme qui induit une équivalence faible d'homotopie $\mathbf{P}(r) \rightarrow \mathbf{Q}(r)$ pour tout r . Voir la section 2.1 pour la terminologie générale.

se plonge dans $(S^{n-1})^{\binom{r}{2}} \times [0, \infty]^{\binom{r}{3}}$ par l'intermédiaire des applications ($i \neq j \neq k \neq i$) :

$$(1.4.14) \quad \theta_{ij}(x) = \frac{\overrightarrow{x_i x_j}}{\|\overrightarrow{x_i x_j}\|} \quad \delta_{ijk}(x) = \frac{\|\overrightarrow{x_i x_j}\|}{\|\overrightarrow{x_i x_k}\|}$$

Ces applications donnent la direction relative de deux points et la distance relative de trois points. L'adhérence $FM_n(r)$ de l'image est une compactification de $C(\mathbb{R}^n, r)$; ce sont des variétés à coins. FM_n a de plus une structure d'opérade E_n : c'est **l'opérade de Fulton-MacPherson**, introduite par GETZLER et JONES [GJ94]. On peut trouver d'autres descriptions par LAMBRECHTS et VOLIĆ [LV14] et FRESSE [Fre15].

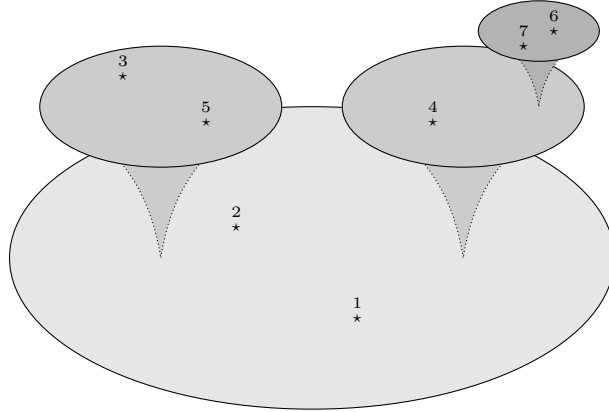


FIGURE 1.F – Exemple d'élément de $FM_2(7)$

En résumé, deux points de la configuration peuvent être « infinitésimalement proches » par rapport à un troisième point (en d'autres termes, $\delta_{ijk}(x) = 0$ signifie que x_i et x_j sont infinitésimalement proches par rapport à x_k). Néanmoins, l'angle et la distance relative des points est toujours bien définie.

Le principe de reconnaissance

Ces opérades sont reliées aux espaces de lacets itérés $\Omega^n X$, où ΩX est l'espace des lacets pointés $\text{Hom}_*(S^1, X)$. En effet, on peut faire de $\Omega^n X$ une E_n -algèbre de manière canonique. Si $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n(k)$ est une configuration de k disques, on peut lui associer le morphisme $\mathbf{c} : \Omega^n X \times \dots \times \Omega^n X \rightarrow \Omega^n X$ en se servant du fait que $S^n = D^n / \partial D^n$ (le point base étant l'image du bord). Pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^n X$, $\mathbf{c}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est l'élément de $\Omega^n X = \text{Hom}_*(S^n, X) = \{(D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, *)\}$ qui :

- vaut $*$ en dehors des images des plongements ;
- est défini par α_k sur l'image du k -ième plongement.

Cet élément est bien défini et continu, car les éléments α_k envoient eux-mêmes le bord sur $*$. On vérifie sans peine que cela fait de $\Omega^n X$ une E_n -algèbre – \mathcal{D}_n a été définie de manière à ce que cela soit vrai.

Il y a une réciproque, le *principe de reconnaissance* :

Théorème 1.4.15 (Principe de reconnaissance, BOARDMAN et VOGT [BV73] et MAY [May72]). *Soit Y un espace connexe par arcs³ muni d'une structure d' E_n -algèbre. Alors il existe un espace $B_n Y$, naturellement associé à Y , et un zigzag d'équivalences faibles $\Omega^n B_n Y \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} Y$ qui sont également des morphismes d' E_n -algèbres.*

Ce théorème est également valable pour $n = \infty$: si Y est une E_∞ -algèbre (connexe par arcs pour simplifier), il existe une suite d'espaces $B_n Y$, naturellement associés à Y avec $B_0 Y = Y$ et $B_n Y \sim \Omega B_{n+1} Y$. C'est ce que l'on appelle un « espace de lacets infinis ».

Homologie des opérades D_n

Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur monoïdal symétrique, ie. un foncteur tel que $F(1) = 1$ et muni d'une transformation naturelle $F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)$, alors il est possible d'appliquer ce foncteur terme à terme aux \mathfrak{S} -modules associés pour fabriquer de nouvelles opérades. Le foncteur homologie $H_* = H_*(\cdot; \mathbb{k}) : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{C}$ vérifie ces conditions. En effet, \mathbb{k} est un corps donc on dispose de l'isomorphisme de Künneth. Une opérade topologique P induit donc une nouvelle opérade (en modules gradués cette fois) $H_*(P)$ ⁴. Appliquons cette construction à D_n .

Quand $n = 1$ ou $n = \infty$, les composantes connexes par arcs de chaque $D_n(r)$ sont contractibles, et il est classique de vérifier :

Proposition 1.4.16. *Les homologies de D_1 et D_∞ sont :*

1. pour $D_1 : H_*(D_1) = \mathbf{Ass}$ l'opérade des algèbres associatives ;
2. pour $D_\infty : H_*(D_\infty) = \mathbf{Com}$ l'opérade des algèbres commutatives.

Le théorème suivant décrit l'homologie pour $1 < n < \infty$:

Théorème 1.4.17 (COHEN [Coh76]). *Soit $[pt] \in H_0(D_n(2))$ et $[S^{n-1}] \in H_{n-1}(D_n(2))$. Alors il existe un isomorphisme d'opérades :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ger}_n & \xrightarrow{\cong} & H_*(D_n) \\ \mu & \longmapsto & [pt] \\ \lambda & \longmapsto & [S^{n-1}] \end{array}$$

C'est en ce sens que les algèbres de Gerstenhaber sont une interpolation entre les algèbres associatives et les algèbres commutatives ; le morphisme induit par $D_n \hookrightarrow D_{n+1}$ en homologie envoie μ sur μ et λ sur 0, et fait de \mathbf{Com} la colimite du diagramme $\mathbf{Ass} \rightarrow \mathbf{Ger}_1 = \mathbf{Poi} \rightarrow \mathbf{Ger}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{Ger}_n \cong \mathbf{Com}$.

Ce théorème est à l'origine de la notation e_n parfois employée pour l'opérade \mathbf{Ger}_n .

3. Plus généralement on demande que Y soit grouplike, ie. que $\pi_0(Y)$ forme un groupe pour l'opération induite par la structure d' E_n algèbre.

4. On pourrait écrire $H_{-*}(P)$: un élément de H_i est considéré comme étant de degré $-i$.

2 Calcul de l'homologie de Gerstenhaber

À toute opérade on peut associer une théorie (co)homologique sur ses algèbres et leurs représentations. Le but ici est de décrire un complexe calculant l'homologie associée à l'opérade de Gerstenhaber Ger_n à partir de celui de FRESSE [Fre06] qui calcule l'homologie de Poisson et des complexes bar itérés [Fre11].

2.1 Catégories modèles

La catégorie des algèbres sur P a, dans les bons cas, une structure de **catégorie modèle**. Cela signifie qu'elle a trois classes de morphismes privilégiés : les **équivalences faibles**, les **fibrations** et les **cofibrations**, vérifiant certains axiomes. Les noms sont en référence aux mêmes concepts en topologie, et la catégorie des espaces topologiques munie de ces classes est effectivement une catégorie modèle. Elles ont été introduites par QUILLEN [Qui67] (où il appelle « catégorie modèle fermée » ce que nous appelons catégorie modèle), et on peut trouver une introduction par DWYER et SPALIŃSKI [DS95].

Une catégorie modèle \mathcal{C} est une catégorie munie de trois classes de morphismes (équivalence faibles $\xrightarrow{\sim}$, fibrations \twoheadrightarrow , cofibrations \hookrightarrow) vérifiant :

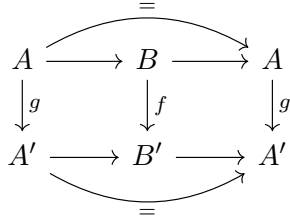
- (CM1) \mathcal{C} est complète et cocomplète ;
- (CM2) Si f et g sont composables et si deux des trois morphismes f , g et $g \circ f$ sont des équivalences faibles, alors le troisième l'est aussi ;
- (CM3) Si f est une équivalence faible, une fibration ou une cofibration, et que g est une rétraction de f (figure 2.A(a)), alors g est dans la même classe ;
- (CM4) Dans le diagramme de la figure 2.A(b), si p ou i est une équivalence faible (on parle alors de fibration ou de cofibration **acyclique**), la flèche en pointillés existe ;
- (CM5) Tout morphisme f peut être factorisé comme $f = pi$ où p est une fibration (resp. fibration acyclique), i une cofibration acyclique (resp. cofibration)¹.

Ces axiomes entraînent que les trois classes sont closes par composition et contiennent les isomorphismes.

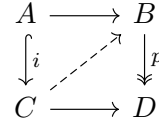
Définition 2.1.1. Un morphisme p a la propriété de relèvement à droite (RLP en anglais) par rapport à une classe de morphismes I si dans le diagramme 2.A(b), où $i \in I$, la flèche en pointillés existe toujours. La propriété de relèvement à gauche (LLP) est définie de manière similaire.

Proposition 2.1.2. *Dans une catégorie modèle, un morphisme f est :*

1. On demande parfois que cette factorisation soit fonctorielle.



(a) Définition d'une rétraction g de f



(b) Problème de relèvement

FIGURE 2.A – Catégories modèles

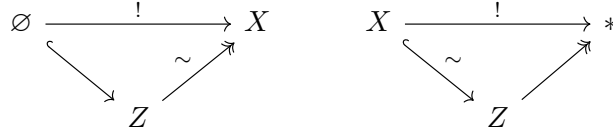
- Une fibration ssi il a la LLP par rapport aux cofibrations acycliques ;
- Une fibration acyclique ssi il a la LLP par rapport aux cofibrations ;
- Une cofibration ssi il a la RLP par rapport aux fibrations acycliques ;
- Une cofibration acyclique ssi il a la RLP par rapport aux fibrations.

En particulier, la structure de catégorie modèle est déterminée par la classe des équivalences faibles et soit la classe des fibrations, soit celle des cofibrations (la dernière étant défini comme celle ayant la propriété de relèvement adaptée).

Définition 2.1.3. Un objet X d'une catégorie modèle est appelé **fibrant** si l'unique morphisme $X \rightarrow *$ vers l'objet terminal² est une fibration. Un **remplacement fibrant** de X est une équivalence faible $X \rightarrow Y$ où Y est fibrant.

Dualement X est appelé **cofibrant** si l'unique morphisme $\emptyset \rightarrow X$ est une cofibration. Un **remplacement cofibrant** est une équivalence faible $Z \rightarrow X$ où Z est cofibrant.

Remarque 2.1.4. Les replacements fibrants et cofibrants existent toujours grâce à l'axiome (CM5) appliqué respectivement à $\emptyset \rightarrow X$ et $X \rightarrow *$:



Définition 2.1.5. La **catégorie homotopique** $h\mathcal{C}$ d'une catégorie modèle \mathcal{C} est la localisation de \mathcal{C} par rapport à sa classe d'équivalence faibles.

Pour rappel, la localisation d'une catégorie \mathcal{C} par rapport à une classe de morphismes W est la catégorie $\mathcal{C} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}[W^{-1}]$, universelle parmi les catégories sous \mathcal{C} telles que $\gamma(w)$ soit un isomorphisme pour tout w dans W . La localisation existe toujours³. Elle peut être construite à partir de (\mathcal{C}, W) en gardant les mêmes objets et en prenant pour morphismes les zigzags formels :

$$(2.1.6) \quad A \xleftarrow{\sim} \cdot \rightarrow \cdot \xleftarrow{\sim} \dots \rightarrow B$$

2. Il existe par complétude de la catégorie.

3. Modulo les problèmes de théorie des ensembles habituels.

où chaque flèche allant « à l'envers » est dans W . La composition est la concaténation des zigzags, en stipulant que $\overleftarrow{w} \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \overleftarrow{w} = 1$ pour tout $w \in W$.

Deux objets $A, B \in \mathcal{C}$ sont dits **faiblement équivalents**, noté $A \simeq B$, s'ils sont reliés par un zigzag où toutes les flèches sont dans W . En d'autres termes, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}[W^{-1}]$. En règle générale il n'est pas possible d'éviter d'avoir affaire à des zigzags ; par exemple dans \mathcal{Top} , il existe des espaces faiblement équivalents sans équivalence faible directe entre eux. Quand les espaces en question sont des CW-complexes (les objets cofibrants de \mathcal{Top} pour la deuxième structure de la table 2.A), le théorème de Whitehead montre que l'on peut se passer des zigzags.

La définition de la catégorie homotopique ne dépend pas des fibrations et des cofibrations, mais la structure de catégorie modèle permet d'avoir une construction plus simple de la localisation à l'aide de classes d'homotopie de morphismes (entre objets fibrants-cofibrants).

Théorème 2.1.7 (QUILLEN [Qui67]). *Soit $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ deux foncteurs adjoints entre deux catégories modèles, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- F préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques ;
- G préserve les fibrations et les fibrations acycliques ;
- F préserve les cofibrations et G préserve les fibrations.

Dans ce cas, F et G sont appelés **adjoints de Quillen** et ils induisent deux foncteurs adjoints, les **foncteurs dérivés totaux**

$$(2.1.8) \quad \mathbb{L}F : h\mathcal{C} \rightleftarrows h\mathcal{D} : \mathbb{R}G$$

qui vérifient une certaine propriété universelle (ce sont des extensions de Kan [Mac98] le long du foncteur de localisation $\mathcal{C} \rightarrow h\mathcal{C}$). De plus, F préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants (resp. G préserve les équivalences faibles entre objets fibrants).

Si de plus pour $c \in \mathcal{C}$ cofibrant et $d \in \mathcal{D}$ fibrant, un morphisme $F(c) \rightarrow d$ est une équivalence faible si et seulement si son adjoint $c \rightarrow G(d)$ l'est, les foncteurs sont appelés **équivalences de Quillen** et les foncteurs dérivés totaux correspondant sont des équivalences de catégories.

Remarque 2.1.9. Il découle du théorème que les foncteurs dérivés totaux, s'ils existent, sont donnés par :

$$\mathbb{L}F(X) = F(Q_X) \qquad \mathbb{R}G(X) = G(R_X)$$

où Q_X est un remplacement cofibrant de X et R_X un remplacement fibrant.

Exemple 2.1.10. Soit A un anneau, et M un A -module à droite. Le foncteur

$$(2.1.11) \quad F = M \otimes_A \cdot : Ch_{\geq 0}^A \rightarrow Ch_{\geq 0}$$

est alors un adjoint à gauche de Quillen. Si N est un module à gauche sur A , on note $K(N, 0) \in Ch_{\geq 0}^A$ le complexe concentré en degré 0. Alors un remplacement cofibrant de $K(N, 0)$ est par définition une résolution projective de N (dans la première structure modèle de la table 2.A), et :

$$(2.1.12) \quad H_i \mathbb{L}F(N) = \mathrm{Tor}_i^A(M, N)$$

\mathcal{C}	Équivalences faibles	Fibrations	Cofibrations
\mathcal{Top}	Équivalences fortes homotopiques	Fibrations de Hurewicz	Cofibrations usuelles
\mathcal{Top}	Équivalences faibles homotopiques	Fibrations de Serre	Rétracts de complexes cellulaires relatifs
$sSet$	Équivalences faibles homotopiques	Fibrations de Kan	Injections
$Ch_{\geq 0}$	Quasi-isomorphismes ^a	Épimorphismes en degré > 0	Monomorphismes à noyau projectif
$Ch_{\geq 0}$	Quasi-isomorphismes	Épimorphismes à noyau injectif	Monomorphismes

^a Les quasi-isomorphismes sont les morphismes induisant un isomorphisme en homologie.

TABLE 2.A – Exemples de catégories modèles

2.2 Homologie des algèbres sur une opérade

Cette section est une récapitulation de LODAY et VALLETTE [LV12, chap 12] et FRESSE [Fre09, chap 4].

2.2.1 Représentations des algèbres sur une opérade

Soit \mathbb{P} une opérade et A une \mathbb{P} -algèbre. Si M est un \mathbb{k} -module, on peut définir un nouveau produit de composition $\mathbb{P} \circ (A; M)$ (noté $S(\mathbb{P}, A; M)$ par FRESSE [Fre09]) :

$$(2.2.2) \quad \mathbb{P} \circ (A; M) = \bigoplus_n \left(\mathbb{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \left(\bigoplus_{i=1}^n A \otimes \dots \underbrace{M}_{\text{position } i} \dots \otimes A \right) \right)$$

Définition 2.2.3. Une **représentation de A** , ou un **A -module**, est un \mathbb{k} -module M muni de deux morphismes $\mu : \mathbb{P} \circ (A; M) \rightarrow M$ et $\eta : M \rightarrow \mathbb{P} \circ (A; M)$ vérifiant des conditions d'associativité et d'unité.

Comme dans le contexte classique, il existe une notion d'**algèbre enveloppante universelle** $\mathcal{U}_{\mathbb{P}}(A)$, qui est une algèbre associative telle que ses modules à gauche sont exactement les représentations de A .

Exemple 2.2.4. La table 2.B regroupe ces notions dans les cas classiques (on note $A_+ = A \oplus \mathbb{k}1$ l'extension unitaire).

2.2.5 Dérivations

Il est également possible de définir la notion de **dérivations**, étant donné une \mathbb{P} -algèbre $B \xrightarrow{f} A$ au-dessus de A et M un A -module, le module $\text{Der}_A(B, M)$ est défini comme

P	P-algèbre	modules sur l'algèbre	\mathcal{U}_P
Ass	algèbre associative A	(A, A) -bimodules	$A_+ \otimes A_+^{op}$
Com	algèbre commutative A	A -modules	A_+
Lie	algèbre de Lie \mathfrak{g}	\mathfrak{g} -modules	$U(\mathfrak{g})$

TABLE 2.B – Exemples de modules et d'algèbres enveloppantes universelles

dans le cas classique. C'est l'ensemble des morphismes $d : B \rightarrow M$ (dans \mathcal{E}) qui vérifient, en notation abrégée (B agit sur M par f) :

$$(2.2.6) \quad d\xi(b_1, \dots, b_n) = \sum \pm \xi(\dots, db_i, \dots)$$

Par exemple pour les algèbres commutatives, on demande que $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$. Ce foncteur est représentable par le **module des différentielles de Kähler** $\Omega_P^1(A)$, décrit dans les références (f^*M est M muni de sa structure de B -module induite par f) :

$$(2.2.7) \quad \text{Der}_A(B, M) \cong \text{Hom}_{B\text{-mod}}(\Omega_P^1(B), f^*M)$$

En règle générale $\Omega_P^1(A)$ est engendré par des éléments du type $\xi(a_1, \dots, da_k, \dots, a_n)$, où $\xi \in P(n)$, $a_i \in A$, et da_i est un élément formel (avec un d droit) ; c'est en fait un quotient de $P \circ (A; A)$. Ces éléments vérifient les relations de dérivation (on peut décrire $\Omega_P^1(A)$ comme un coégaliseur). La table 2.C reprend ces notions dans les cas classiques.

P	relations	Ω_P^1
Ass	$d(ab) = a(db) + (da)b$	$A_+ \otimes A \otimes A_+ / \sim$ $a \otimes d(bb') \otimes c \sim (ab) \otimes db' \otimes c + a \otimes db \otimes (b'c)$
Com	$d(ab) = a(db) + (da)b$	$A_+ \otimes A / \sim$ $a \otimes d(bc) \sim (ab) \otimes dc + (ac) \otimes db$
Lie	$d[u, v] = [du, v] + [u, dv]$	$\bar{U}(\mathfrak{g})$

TABLE 2.C – Dérivations et différentielles de Kähler

2.2.8 Définition de l'homologie opéradique

Sous de bonnes conditions, la catégorie des opérades et la catégorie des algèbres sur une opérade donnée héritent d'une structure de catégorie (semi-)modèle. On peut trouver un traitement systématique par BERGER et MOERDIJK [BM03] et FRESSE [Fre09].

Plus généralement, la catégorie des opérades forme en fait une catégorie semi-modèle – voir le théorème 12.2.A de FRESSE [Fre09], ainsi que HINICH [Hin97] et SPITZWECK [Spi01]. En résumé, les équivalences faibles (resp. fibrations) $P \rightarrow Q$ sont les morphismes tels que $P(n) \rightarrow Q(n)$ est une équivalence faible (resp. fibration) pour tout n . Les cofibrations sont alors les morphismes ayant la LLP par rapport aux fibrations acycliques.

P	(Co)homologie associée	
Ass	(Co)homologie de Hochschild	[Hoc45 ; CE56]
Com	(Co)homologie de Harrison	[Har62]
Lie	(Co)homologie de Chevalley-Eilenberg	[CE48]
Poi	(Co)homologie de Poisson	[Lic77 ; Fre06]

TABLE 2.D – Exemples de (co)homologies

La structure modèle sur \mathcal{M} est définie de manière similaire et les opérades cofibrantes en tant que \mathfrak{S} -module sont appelées \mathfrak{S} -cofibrantes. Tous les \mathfrak{S} -modules sont \mathcal{C} -cofibrants, (= cofibrants dans $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$) car l’anneau de base \mathbb{k} est un corps et tous les \mathbb{k} -modules sont donc projectifs. Il n’est en revanche pas vrai, même dans ce cas, que tous les \mathfrak{S} -modules sont \mathfrak{S} -cofibrants, surtout en caractéristique positive. Par exemple ni **Com** ni **Lie** ne sont \mathcal{C} -cofibrants en caractéristique positive.

Si \mathcal{E} est une catégorie modèle monoïdale symétrique, la catégorie ${}_{\mathfrak{P}}\mathcal{E}$ des algèbres sur \mathfrak{P} (où \mathfrak{P} est une opérade \mathcal{C} -cofibrante) hérite également d’une structure (semi-)modèle [Fre09, 12.3.A]. Les équivalences faibles (resp. fibrations) sont les équivalences faibles (resp. fibrations) de \mathcal{E} , et les cofibrations sont définies par la propriété de relèvement. On peut donc parler de \mathfrak{P} -algèbre cofibrante.

Ce sont ces notions qui permettent de définir la (co)homologie des algèbres sur une opérade (à coefficients dans un module sur l’algèbre). Elle est définie par analogie avec la cohomologie d’André-Quillen [And74 ; Qui70] et est décrite par LODAY et VALLETTE [LV12] et FRESSE [Fre09].

Définition 2.2.9. Soit \mathfrak{P} une opérade, A une algèbre sur \mathfrak{P} , M un module sur A . Soit Q_A un remplacement cofibrant de A . L’homologie et la cohomologie sont définies comme :

$$H_{\mathfrak{P}}^*(A; M) = H^*(\mathrm{Der}_{\mathfrak{P}}(Q_A, M)) \quad H_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{P}}(A; M) = H_*(M \otimes_{U_{\mathfrak{P}}(Q_A)} \Omega_{Q_A}^1(A))$$

Ce sont des foncteurs dérivés totaux, respectivement de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{P}}(\cdot, M)$ et $M \otimes_{U_{\mathfrak{P}}(\cdot)} \Omega_{\mathfrak{P}}^1(\cdot)$ (qui sont des foncteurs $({}_{\mathfrak{P}}\mathcal{E} \downarrow A) \rightarrow \mathcal{C}$) et ils vérifient donc les propriétés usuelles des foncteurs dérivés – le choix de la résolution cofibrante n’affecte pas la classe d’homotopie du résultat, il existe des suites spectrales de coefficients universels, etc.

Exemple 2.2.10. La table 2.D reprend des exemples de cohomologies définies ainsi. Cette notion de cohomologie coïncide donc avec plusieurs notions classiques de cohomologies dans le cadre algébrique. Pour prouver ces résultats, l’idée est de prendre des résolutions cofibrantes connues (par exemple le complexe bar) pour retrouver ces résultats.

Cette définition ne dépend en particulier pas de la catégorie \mathcal{E} choisie – ce ne sont pas nécessairement des dg-modules, par exemple. On peut ainsi définir la cohomologie des \mathfrak{P} -algèbres dans $\mathcal{M}_{\mathfrak{Q}}$, etc. En particulier comme \mathfrak{P} est un $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ -bimodule, il est donc possible de définir $H_{\mathfrak{P}}^*(\mathfrak{P}, M)$ où M est un module sur \mathfrak{P} vu comme un \mathfrak{P} -module à droite; on peut même choisir $M = \mathfrak{P}$.

Dans ce mémoire, nous allons d'abord définir un complexe qui calcule la (co)homologie des n -algèbres de Gerstenhaber en dg-modules, et ensuite généraliser ce complexe aux modules à droite sur une opérade. Nous verrons comment interpréter cette homologie comme un complexe de déformations.

Il est également possible de donner une définition pour des opérades topologiques, et ainsi de parler par exemple de $H_{E_n}^*(X; M)$, où X est une E_n -algèbre et M un module sur X .

2.2.11 Homologies de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg

Deux théories homologiques en particulier vont nous intéresser : l'homologie de Hochschild (associée à l'opérade **Ass**) et l'homologie de Chevalley-Eilenberg (associée à l'opérade **Lie**).

Hochschild

L'homologie de Hochschild [Hoc45 ; CE56] est l'homologie opéradique des algèbres sur l'opérade **Ass**, les algèbres associatives. Elle est définie pour une algèbre associative A et un (A, A) -bimodule M (ie. une **Ass**-représentation de A).

Le module sous-jacent au complexe est défini par :

$$(2.2.12) \quad CH_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$$

La différentielle b est en trois parties :

- La différentielle \bar{d} induite par la différentielle interne de A (en règle générale on peut l'ignorer, elle n'intervient que dans les calculs explicites) ;
- La partie « sans coefficients » $b' : A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes(n-1)}$ donnée par :

$$(2.2.13) \quad b'(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_i \pm (a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \dots \otimes a_n)$$

- La partie « avec coefficients » $b'' : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes(n-1)}$ donnée par :

$$(2.2.14) \quad b''(m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = m a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n + \pm a_n m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$$

On vérifie alors que $b' + b''$ est une différentielle, et on note $HH_*(A, M)$ l'homologie associée. On peut également définir de manière duale la cohomologie $HH^*(A, M)$ avec $CH^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ et des différentielles similaires.

Cette homologie s'interprète en termes de foncteurs dérivés (pour rappel $\mathcal{U}_{\mathbf{Ass}}(A) = A \otimes A^{op}$) :

$$(2.2.15) \quad HH_*(A, M) = \text{Tor}_*^{A \otimes A^{op}}(A, M) \quad HH^*(A, M) = \text{Ext}_{A \otimes A^{op}}^*(A, M)$$

Chevalley-Eilenberg

L'homologie de Chevalley-Eilenberg [CE48] est la théorie homologique associée à l'opérade Lie. Elle est définie pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} et une \mathfrak{g} -représentation M (de manière équivalente, un $U\mathfrak{g}$ -module). Si \mathbb{k} est la représentation triviale de \mathfrak{g} :

$$(2.2.16) \quad H_*(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Tor}_*^{U\mathfrak{g}}(\mathbb{k}, M) \quad H^*(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}_{U\mathfrak{g}}^*(\mathbb{k}, M)$$

On peut aussi décrire explicitement un complexe qui calcule l'homologie. Le complexe homologique est :

$$(2.2.17) \quad C_*(\mathfrak{g}, M) = M \otimes S(\Sigma\mathfrak{g})$$

La différentielle est en deux parties (trois si l'on compte la différentielle interne à \mathfrak{g}) $\partial_\lambda = 1 \otimes \partial_\lambda' + \partial_\lambda''$:

$$(2.2.18) \quad \partial_\lambda'(\xi_1 \dots \xi_n) = \sum_{i < j} [\xi_i, \xi_j] \xi_1 \dots \hat{\xi}_i \dots \hat{\xi}_j \dots \xi_n$$

$$(2.2.19) \quad \partial_\lambda''(x \otimes \xi_1 \dots \xi_n) = \sum_i [m, \xi_i] \otimes \xi_1 \dots \hat{\xi}_i \dots \xi_n$$

La version cohomologique est de la forme $\mathrm{Hom}(S(\Sigma\mathfrak{g}), M)$ avec des différentielles définies de manière similaire.

2.3 Définition du complexe

2.3.1 Complexes bar itérés

Définition 2.3.2. Soit A une dg-algèbre associative. Le **complexe bar** [EM53] de A est un complexe BA défini par $BA = T^c(\Sigma A) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\Sigma A)^{\otimes n}$ muni d'une différentielle $b' = \delta + \partial$ où :

$$\begin{aligned} \delta(a_1, \dots, a_n) &= \sum \pm(a_1, \dots, d_A a_i, \dots, a_n) \\ \partial(a_1, \dots, a_n) &= \sum \pm(a_1, \dots, a_i a_j, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Les signes sont donnés par la convention de Koszul. Si A est non graduée (ie. concentrée en degré 0 avec $d_A = 0$), on reconnaît une partie de la définition de l'homologie de Hochschild. Le complexe bar définit un foncteur ${}_{\mathrm{Ass}}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Remarque 2.3.3. On note (a_1, a_2, \dots) au lieu de $(\Sigma a_1) \otimes (\Sigma a_2) \otimes \dots$ pour alléger les notations. Il est également pratique de noter ces éléments sous la forme d'arbre $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \\ \searrow \quad \swarrow \end{array}$, quand ce à quoi correspondent les indices est clair.

Remarque 2.3.4. Pour l'instant, tout est écrit dans le contexte $\mathcal{E} = \mathcal{C}$; mais les formules sont en fait encore valides pour des catégories plus générales, en remplaçant le produit $a \cdot b$ par $\mu(a, b)$ où μ est l'image du générateur de Ass dans End_A . Les formules sont alors à traduire en des diagrammes associant les puissances tensorielles de $A \in \mathcal{E}$.

Ce procédé se généralise. Si A est une n -algèbre de Gerstenhaber, le crochet shuffle ainsi défini sur BA est de degré $n - 2$, et est compatible aux différentielles et au produit shuffle – c’est donc une $(n - 1)$ -algèbre de Gerstenhaber. En itérant ce processus :

Proposition 2.3.12. *Le foncteur « complexe bar itéré » B^{n-1} définit un foncteur*

$$B^{n-1} : \text{Ger}_n \mathcal{E} \rightarrow \text{Poi} \mathcal{E}$$

2.3.13 Homologie de Poisson

L’homologie de Poisson est un cas particulier de l’homologie des algèbres sur une opérade définie dans la section 2.2. Dans l’article [Fre06], une résolution cofibrante canonique pour les algèbres de Poisson est introduite, et le résultat est un complexe

$$(2.3.14) \quad C_*^{\text{Poi}}(A, M)$$

à la description « simple » et qui calcule l’homologie de Poisson.

Le module sous-jacent au complexe est $M \otimes BA$. C’est un bicomplexe, dont les deux différentielles sont :

- Le bord de Hochschild $b = 1 \otimes b' + b''$;
- La différentielle de Chevalley-Eilenberg $\partial_\lambda = 1 \otimes \partial_{\lambda'} + \partial_{\lambda''}$.

La différentielle de Chevalley-Eilenberg est définie via un isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt. Soit $e^{(1)}$ le premier idempotent Eulérien agissant sur $T^c(\Sigma A)$ [Lod94 ; Lod89 ; Pat94 ; Fre98]. L’application $T^c(\Sigma A) \xrightarrow{e^{(1)}} e^{(1)}T^c(\Sigma A)$ est isomorphe à la projection sur le module des indécomposables $QT^c(\Sigma A) \cong L^c(\Sigma A)$ pour le produit shuffle, donc par le théorème de Milnor-Moore (dual) et celui de PBW, il y a un isomorphisme

$$(2.3.15) \quad T^c(\Sigma A) \cong S(e^{(1)}T^c(\Sigma A))$$

Or par des arguments de propriété universelle, $QT^c(\Sigma A)$ est isomorphe à la cogèbre de Lie colibre $L^c(\Sigma A)$ (où le cocrochet est induit par le coproduit après antisymétrisation). De plus, le crochet shuffle induit un crochet de degré -1 qui fait de $\mathfrak{g} = \Sigma^{-1}L^c(\Sigma A) = \Lambda L^c(A)$ une bigèbre de Lie. En conclusion,

$$(2.3.16) \quad T^c(\Sigma A) \cong S(\Sigma \mathfrak{g})$$

où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie. C’est exactement le module sous-jacent au complexe de Chevalley-Eilenberg de \mathfrak{g} , que l’on peut donc munir de la différentielle de Chevalley-Eilenberg $\partial_{\lambda'}$, qui se transporte par isomorphisme sur BA . Alors on obtient ainsi un bicomplexe d’après un théorème de FRESSE [Fre06].

En remontant les définitions, on peut décrire $\partial_{\lambda'}$:

$$(2.3.17) \quad \partial_{\lambda'} \left(e^{(1)}u_1 \sqcup \dots \sqcup e^{(1)}u_s \right) = \sum_{i < j} \pm \dots \sqcup e^{(1)}[u_i, u_j] \sqcup \dots e^{(1)}\hat{u}_j \dots$$

où chaque $u_i \in T^c(\Sigma A)$, le crochet étant le crochet shuffle.

sous-arbre tensorisé avec l'arbre où l'on a enlevé le premier (resp. le dernier) élément du sous-arbre (voir la section 4.3.1 pour une définition précise). On définit alors $(a_i \in B^{n-1}A, u_i \in B^{n-1}A)$:

$$(2.3.22) \quad \begin{aligned} b''(m \otimes (a_1, \dots, a_s)) &= \sum_i \sum_{R_{n-1}(a_i)} \pm a'_i m \otimes (\dots a''_i \dots) \\ \partial_\lambda''(m \otimes e^{(1)}u_1 \sqcup \dots \sqcup e^{(1)}u_s) &= \sum_i \sum_{R_{n-1}(u_i)} \pm [m, u'_i] \otimes (\dots e^{(1)}u''_i \dots) \end{aligned}$$

Cette action ne fait pas de M une représentation de Poisson de $B^{n-1}A$: elle n'est pas compatible avec le produit shuffle, par exemple. Néanmoins, le module $M \otimes B^n A$ muni de $b = 1 \otimes b' + b''$ et $\partial_\lambda = 1 \otimes \partial_\lambda' + \partial_\lambda''$, est un bicomplexe. Les calculs sont identiques à ceux de FRESSE [Fre06] ; le seul point à vérifier est que b et $e^{(1)}$ commutent, ce qui sera fait dans la section 4.3.13. On note

$$(2.3.23) \quad C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}M, A)$$

le complexe ainsi défini. On note également

$$(2.3.24) \quad C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}M, A) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)}(C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)), M)$$

où $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ est l'algèbre enveloppante dans la catégorie $_{\text{Ger}_n}\mathcal{E}$. Les homologies de ces complexes sont notées respectivement $H_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, M)$ et $H_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, M)$ (même si M n'est pas une représentation de Poisson de $B^{n-1}A$). Le chapitre 4 contient une description explicite des différentielles en termes d'arbres. Nous allons prouver :

Théorème A. *Soit A une Ger_n -algèbre et M une représentation de A , alors :*

$$H_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, M) \cong \Sigma^{n-1} H_*^{\text{Ger}_n}(A, M) \quad H_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, M) \cong \Sigma^{n-1} H_{\text{Ger}_n}^*(A, M)$$

3 Validation de la construction du complexe

Le but de ce chapitre est de montrer que le complexe

$$(C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, M), b + \partial_\lambda)$$

défini précédemment calcule l'homologie de Gerstenhaber $H_*^{\text{Ger}_n}(A, M)$, et de même pour la cohomologie.

3.1 Cas des coefficients triviaux

Nous commençons par considérer le cas d'une algèbre libre et de coefficients triviaux. Soit $A = \text{Ger}_n \circ X$, alors d'après le théorème 1.4.8, $A = S(\Sigma^{1-n}L(\Sigma^{n-1}X))$. Il faut donc calculer l'homologie du complexe total associé au bicomplexe :

$$(3.1.1) \quad C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathbb{k}) = (B^n A, b', \partial_{\lambda'})$$

La suite spectrale associée au bicomplexe converge vers l'homologie que nous cherchons à calculer (c'est une suite dans le premier quadrant, l'anneau de base est un corps).

La page E^0 de la suite spectrale est le même module muni du bord de Hochschild : $(B^n A, b')$. D'après FRESSE [Fre11, Proposition 6.3], l'homologie de ce complexe est $E^1 = S(\Sigma L(\Sigma^{n-1}X))$, et il est muni de la différentielle induite par ∂_λ . Montrons que cette différentielle induite est (à suspension près) la différentielle du complexe de Chevalley-Eilenberg de $L(\Sigma^{n-1}X)$.

La différentielle induite est définie de la manière suivante. Il y a un quasi isomorphisme [Fre11] :

$$(3.1.2) \quad \nabla : S(\Sigma L(\Sigma^{n-1}X)) \rightarrow B^n A$$

Posons $\mathfrak{g} = \Sigma^{-1}L^c(\Sigma B^{n-1}A)$. Le diagramme commutatif suivant définit $\partial_{\lambda'}$ sur $B^n A$ et donc d sur E^1 :

$$(3.1.3) \quad \begin{array}{ccc} S(\Sigma \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\delta^{CE}} & S(\Sigma \mathfrak{g}) \\ \cong \downarrow \gamma & & \cong \downarrow \gamma \\ B^n A & \xrightarrow{\partial_{\lambda'}} & B^n A \\ \nabla \uparrow \sim & & \nabla \uparrow \sim \\ S(\Sigma L(\Sigma^{n-1}X)) & \xrightarrow{d} & S(\Sigma L(\Sigma^{n-1}X)) \end{array}$$

Soit \sqcup le produit shuffle sur $B^n A$. γ et ∇ sont des morphismes d'algèbre. Soit $x_1, \dots, x_s \in \Sigma L(\Sigma^{n-1}X)$, nous voulons donc calculer $d(x_1 \dots x_s)$. Soit $\bar{x}_i = \nabla(x_i) \in B^n A$:

c'est l'élément de $B^n A$ qui correspond à un arbre à une feuille, x_i vu comme un élément de A (après suspension).

$$(3.1.4) \quad \nabla(x_1 \dots x_s) = \bar{x}_1 \sqcup \dots \sqcup \bar{x}_s$$

$$(3.1.5) \quad \partial_\lambda' \nabla(x_1 \dots x_s) = \sum \pm \bar{x}_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma[\gamma^{-1}(\bar{x}_i), \gamma^{-1}(\bar{x}_j)] \dots \sqcup \bar{x}_s$$

Mais $\gamma[\gamma^{-1}(\bar{x}_i), \gamma^{-1}(\bar{x}_j)] = \overline{[x_i, x_j]}$. En effet sur les arbres à une feuille toutes les applications préservent le crochet, $e^1(f) = (f)$, et $\mathfrak{g} \rightarrow B^{n-1}A$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Le dernier élément dans l'égalité précédente est donc égal à $\nabla(\delta^{CE}(x_1 \dots x_s))$, d'où nous concluons $d = \delta^{CE}$.

Le complexe de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie libre est acyclique, donc la suite spectrale dégénère au rang 2 et finalement :

$$(3.1.6) \quad H_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathbb{k}) = \Sigma^n X$$

Or d'après le lemme de FRESSE [Fre06, §1.2.7] adapté au cas gradué, on trouve (A est une algèbre de Gerstenhaber libre) $\Omega_{\text{Ger}_n}^1(A) \cong \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A) \otimes \Sigma X$. En particulier $\mathbb{k} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A) = \Sigma X$. D'où le résultat voulu :

Proposition 3.1.7. *Il existe un quasi-isomorphisme :*

$$C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathbb{k}) = (B^n A, d') \xrightarrow{\sim} \Sigma^n X \cong \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A) \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)} \mathbb{k}$$

3.2 Cas $M = \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ et A libre

On considère toujours le cas $A = \text{Ger}_n \circ X$ libre sur X . Construisons un quasi-isomorphisme de $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ -modules, naturel en A :

$$(3.2.1) \quad C(A) = C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)) \rightarrow \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A)$$

3.2.2 Définition du morphisme

Soit $\pi : B^n A \rightarrow \Sigma^n A$ la projection sur les arbres à une seule feuille. C'est un morphisme (de dg-modules différentiels gradués) naturel en A . Le morphisme $\Sigma A \rightarrow \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A)$, $\Sigma a \mapsto da$ est également naturel en A . La composition de ces deux morphismes donne un morphisme $B^n A \rightarrow \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A)$ qui induit finalement un morphisme :

$$(3.2.3) \quad \phi : C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)) = B^n A \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)} \rightarrow \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A)$$

Montrons que ce morphisme est un quasi-isomorphisme pour toute algèbre libre $A = \text{Ger}_n \circ X$. Dans ce cas $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A) \otimes \Sigma X \cong \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A)$ comme $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ -modules, via l'isomorphisme $\alpha(u \otimes \Sigma x) = u \cdot dx$. Il suffit de montrer que $\psi = \alpha^{-1} \phi$ est un quasi-isomorphisme.

Proposition 3.2.4. *Le morphisme ψ (de manière équivalente, ϕ) envoie la différentielle d sur zéro et définit donc un morphisme de dg-modules.*

Démonstration. Soit $\underline{a} \in B^n A$, $u \in \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$. Un examen de $b(\underline{a} \otimes u)$ montre que $\phi(b(\underline{a} \otimes u)) = 0$, sauf éventuellement si \underline{a} a exactement deux feuilles, et que ces deux feuilles sont dans le même sous-arbre de dernier niveau (ie. $\underline{a} = (\dots, (a_1, a_2), \dots)$ avec $a_1, a_2 \in A$). En effet, dans le cas contraire, tous les arbres qui apparaissent ont au moins deux feuilles, et sont envoyés sur 0 par π . Dans ce cas, nous avons alors, aux signes près :

$$(3.2.5) \quad \phi(b(\underline{a} \otimes u)) = u \cdot d(a_1 a_2) + a_1 u \cdot da_2 + a_2 u \cdot da_1$$

Et donc le résultat est nul (d est une dérivation par rapport au produit).

De la même manière soit ϕ' :

$$(3.2.6) \quad \phi' : S(e^1 T^c(\Sigma B^{n-1} A)) \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A) \rightarrow \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(A)$$

Et de même $\phi'(\partial_\lambda(z \otimes u)) = 0$ sauf éventuellement si $z = e^2(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ où $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in B^{n-1} A$ ont exactement une feuille chacun (notées respectivement a_1, a_2). Dans ce cas, aux signes près :

$$(3.2.7) \quad \phi'(\partial_\lambda(e^2(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \otimes u)) = [u, a_1] \cdot da_2 + [u, a_2] \cdot da_1 + u \cdot d[a_1, a_2]$$

Or d est une dérivation par rapport au crochet, et $[u, a] \cdot db = u \cdot [a, db]$. Donc le résultat est nul. \square

3.2.8 Définition de la filtration et de la suite spectrale

Il y a une graduation en poids sur $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ pour $A = \text{Ger}_n \circ X$ venant de [Fre09, §4] :

$$(3.2.9) \quad \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A) = \text{Ger}_n\{1\} \circ X = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \text{Ger}_n(r+1) \otimes_{\mathfrak{S}_r} X^{\otimes r}$$

La notation $M\{1\}$ désigne la désuspension d'un \mathfrak{S} -module : les éléments d'arité $r+1$ passent en arité r . \mathfrak{S}_r agit sur $M(r+1)$ via l'injection $\mathfrak{S}_r \hookrightarrow \mathfrak{S}_{r+1}$ induite par $\{1, \dots, r\} \hookrightarrow \{1, \dots, r+1\}$ (la « dernière variable » reste fixe). Par la suite on appellera r « l'arité en X » dans $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$.

De manière informelle, $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ est engendré par des monômes $p(x_1, \dots, x_r, \cdot)$ pour $p \in \text{Ger}_n(r+1)$, $x_i \in X$ et \cdot est une variable supplémentaire de position représentant l'action de A sur une représentation. Par exemple $\mu(x, \cdot) \in \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ est l'élément de $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ qui agit sur les représentations de A par multiplication à gauche par x , idem pour $[x, \cdot]$.

Cette graduation en poids induit une filtration décroissante sur $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$:

$$(3.2.10) \quad F_s \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A) = \bigoplus_{r=s}^{\infty} \text{Ger}_n(r+1) \otimes_{\mathfrak{S}_r} X^{\otimes r}$$

Ce qui induit une filtration sur le module

$$(3.2.11) \quad C(A) = C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1} A, \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)) = B^n A \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$$

donnée par $F_s C(A) = B^n A \otimes F_s \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$.

Proposition 3.2.12. *La différentielle $d = b + \partial_\lambda$ est compatible avec la filtration $F_s C(A)$.*

Démonstration. La composante « sans coefficients » b' ne touche pas à la partie en $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ donc laisse la filtration inchangée. Si $\underline{a} \in B^n A$, $u \in \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$, alors $b''(\underline{a} \otimes u)$ est de la forme $\sum \underline{a}' \otimes a'' u$, où le poids de a'' en X est strictement positif. Donc b'' augmente (strictement) la filtration, en particulier $b''(F_s C(A)) \subset F_{s+1} C(A) \subset F_s C(A)$.

De même soit $C(A) \cong S(L^c(\Sigma B^{n-1} A)) \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ muni de la même filtration. La partie ∂_λ' de la différentielle ne touche pas à la partie $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ donc laisse la filtration inchangée. Si $\underline{z} \in S(L^c(\Sigma B^{n-1} A))$ et $u \in \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$, alors $\partial_\lambda''(\underline{z} \otimes u)$ est de la forme $\sum \underline{z}' \otimes [z'', u]$ pour $z'' \in A$ de poids en X strictement positif, donc ∂_λ'' augmente strictement la filtration. \square

Cette filtration induit donc bien un complexe filtré $(F_* C(A), d)$. Soit $(E^r C(A), d^r)$ la suite spectrale associée.

Rappelons que $\psi(\underline{a} \otimes u) = \alpha^{-1}(u \cdot d(\pi \underline{a}))$. La filtration sur $\Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ est encore la filtration induite par celle sur $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$.

Proposition 3.2.13. *ψ est compatible avec les filtrations :*

$$\psi(F_s C(A)) \subset \Sigma^n X \otimes F_s \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$$

Démonstration. Soit $\underline{a} \otimes u \in F_s C(A)$, montrons $\psi(\underline{a} \otimes u) \in \Sigma^n X \otimes F_s \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$. Si $\pi \underline{a} = 0$ alors c'est clair. Sinon, \underline{a} est un arbre à une feuille, notée a . Par récurrence sur le poids en X de a :

- Si $a = x$ est un monôme en X , alors $\psi(\underline{a} \otimes u) = x \otimes u$ et la filtration est respectée.
- Si $a = bc$ est un produit où b et c ont des poids strictement positifs, alors

$$\begin{aligned} \phi(\underline{bc} \otimes u) &= u \cdot d(bc) \\ &= u \cdot (db)c + u \cdot b(dc) \\ (3.2.14) \quad &= (uc) \cdot db + (ub) \cdot dc \\ &= \phi(\underline{c} \otimes ub) + \phi(\underline{b} \otimes uc) \end{aligned}$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence.

- Le cas $a = [b, c]$ est identique (d est aussi une dérivation par rapport au crochet). \square

Le morphisme ψ envoyait de plus la différentielle de $C(A)$ sur la différentielle de $\Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$, à savoir zéro. Soit $E^*(\Omega_{\text{Ger}_n}^1(A))$ la suite spectrale (triviale) associée à $\Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$. Alors ψ induit un morphisme de suites spectrales :

$$(3.2.15) \quad \psi : E^*(C(A)) \rightarrow E^*(\Omega_{\text{Ger}_n}^1(A))$$

3.2.16 Calcul de $E^1 C(A)$

D'après les définitions,

$$(3.2.17) \quad E_s^0 C(A) = F_s C(A) / F_{s+1} C(A) \cong B^n A \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)^{(s)}$$

où $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)^{(s)}$ est le sous-module de $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$ constitué des éléments ayant une arité en X exactement égale à s .

Par ce qui précède, la différentielle d^0 est égale à la différentielle d' agissant sur $B^n A$, ie.

$$(3.2.18) \quad E^0 C(A) = (B^n A, d') \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$$

(la partie d'' augmente strictement l'arité en X , donc arrive dans $F_{s+1}C(A)$). Nous sommes donc réduits au cas sans coefficients. Par la section 3.1, nous obtenons donc :

$$(3.2.19) \quad E^1 C(A) \cong \Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$$

Grâce au calcul de $H_*(B^n A, d')$, ψ induit l'identité sur $\Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$. En effet, la partie b' de la différentielle consistait à remonter ∇ , donc en fait à projeter sur les arbres à une feuille. La partie ∂_λ' utilisait l'acyclicité du complexe de CE d'une algèbre libre, donc gardait uniquement la composante linéaire. C'est exactement la description du morphisme ψ .

Le morphisme de complexes filtrés ψ induit donc un isomorphisme $E^1 C(A) \xrightarrow{\sim} E^1(\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A))$, donc [McC01, Theorem 3.4] il induit un isomorphisme sur toutes les pages suivantes. Or $E^*(\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A))$ est triviale, donc $E^r C(A)$ dégénère au rang 1, et donc $E^1 C(A) = E^\infty C(A)$. Finalement :

Proposition 3.2.20. *Le morphisme ψ induit un isomorphisme sur les pages E^∞ des suites spectrales.*

3.2.21 ψ est un quasi-isomorphisme

Reste à voir que cela implique que ψ est un quasi-isomorphisme. Rappelons (2.3.9) que $B^n A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^n(r) \otimes_{\mathfrak{S}_r} A^{\otimes r} = T^n \circ A$ où T^n est le \mathfrak{S} -module des arbres à n niveaux. Comme $A = \mathbf{Ger}_n \circ X$, on a alors :

$$(3.2.22) \quad B^n A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} (T^n \circ \mathbf{Ger}_n)(r) \otimes_{\mathfrak{S}_r} X^{\otimes r}$$

Il y a une graduation en poids sur $B^n A$ (qui correspond encore à l'arité en X) :

$$(3.2.23) \quad (B^n A)^{(i)} = (T^n \circ \mathbf{Ger}_n)(i) \otimes_{\mathfrak{S}_i} X^{\otimes i}$$

La graduation totale en poids (en X) sur $C(A)$ (où $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)^{(j)}$ a été défini précédemment) est donc :

$$(3.2.24) \quad C(A)^{(k)} = \bigoplus_{i+j=k} (B^n A)^{(i)} \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)^{(j)}$$

Soit $F_s C(A)^{(k)} = C(A)^{(k)} \cap F_s C(A)$. En reprenant la preuve de la proposition 3.2.12, on voit que d préserve le poids total en X (dans la preuve, le poids de a est égal à la somme des poids de a' et a'' , de même pour z). Il y a donc un scindage du module

différentiel gradué filtré $C(A)$ en $C(A) = \bigoplus_k C(A)^{(k)}$. De même pour $\Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$, et ψ est compatible avec ce scindage (même preuve que la proposition 3.2.13) :

ψ induit toujours un isomorphisme sur les pages E^1 des suites spectrales associées. Or la filtration sur $C(A)^{(k)}$ est bornée : $F_{k+1}C(A)^{(k)} = 0$. Donc d'après MCCLEARY [McC01, Theorem 3.5], ψ est un quasi-isomorphisme $C(A)^{(k)} \xrightarrow{\sim} (\Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A))^{(k)}$, et ce pour tout k . Comme $H_*(C(A), d) = \bigoplus_k H_*(C(A)^{(k)}, d)$ (la graduation est compatible avec la différentielle donc la suite spectrale est scindée), on obtient finalement :

Proposition 3.2.25. *Pour toute algèbre libre $A = \mathbf{Ger}_n \circ X$, il y a un quasi-isomorphisme :*

$$(3.2.26) \quad \psi : C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)) \xrightarrow{\sim} \Sigma^n X \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A) \cong \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$$

3.3 Passage aux algèbres cofibrantes

Considérons pour le moment $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ la catégorie des dg-modules. La catégorie ${}_{\mathbf{Ger}_n} \mathcal{E}$ des \mathbf{Ger}_n -algèbres est munie de la structure de catégorie modèle définie par FRESSE [Fre09, §12.3] ; en particulier les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes.

Nous disposons de deux foncteurs ${}_{\mathbf{Ger}_n} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$:

$$(3.3.1) \quad C(A) = C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)) = (B^n A \otimes \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A), d) \quad \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$$

Et d'une transformation naturelle définie par l'équation (3.2.3) pour toutes les \mathbf{Ger}_n -algèbres :

$$(3.3.2) \quad C \xrightarrow{\phi} \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\cdot)$$

Proposition 3.3.3. *Cette transformation naturelle induit un quasi-isomorphisme pour toute \mathbf{Ger}_n -algèbre cofibrante \tilde{A} :*

$$C(\tilde{A}) \xrightarrow{\sim} \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\tilde{A})$$

Démonstration. La section 3.2 montre que ϕ est un quasi-isomorphisme pour toute algèbre libre A . Alors la théorie générale de FRESSE [Fre09] implique que ϕ donne un quasi-isomorphisme pour toute algèbre cofibrante $\tilde{A} \in {}_{\mathbf{Ger}_n} \mathcal{E}$ de la manière suivante :

La construction du foncteur C est valable dans n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique \mathcal{E} au-dessus de \mathcal{C} (voir la section 5.3), et elle est induite par un \mathbf{Ger}_n -module à droite. Ce module est $C(\mathbf{Ger}_n)$, où \mathbf{Ger}_n est vu comme une \mathbf{Ger}_n -algèbre dans la catégorie des \mathbf{Ger}_n -modules à droite. En d'autres termes :

$$(3.3.4) \quad C(A) = C(\mathbf{Ger}_n) \circ_{\mathbf{Ger}_n} A$$

Il est montré dans FRESSE [Fre09] que le foncteur $\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\cdot)$ est représenté par un \mathbf{Ger}_n -module à droite, à savoir $\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\mathbf{Ger}_n) \in \mathcal{E}_{\mathbf{Ger}_n}$:

$$(3.3.5) \quad \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A) = \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\mathbf{Ger}_n) \circ_{\mathbf{Ger}_n} A$$

Donc si $A = \mathbf{Ger}_n \circ X$ est une \mathbf{Ger}_n -algèbre libre, on obtient alors :

$$(3.3.6) \quad C(A) = C(\mathbf{Ger}_n) \circ X \quad \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A) = \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\mathbf{Ger}_n) \circ X$$

La section 5.3.4 montre qu'il existe toujours un quasi-isomorphisme dans ce cas (la section 5.3.4 n'utilise pas le reste de la section actuelle) :

$$(3.3.7) \quad C(\mathbf{Ger}_n) \circ X \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\mathbf{Ger}_n) \circ X$$

Ceci est valable pour tout $X \in \mathcal{E}$, pour toute catégorie monoïdale symétrique \mathcal{E} au-dessus de \mathcal{C} . En particulier cela s'applique à $\mathcal{E} = \mathcal{M}$, $X = I$, et on a ainsi un quasi-isomorphisme $C(\mathbf{Ger}_n) \xrightarrow{\sim} \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(\mathbf{Ger}_n)$.

Alors le théorème 15.2.A(a) de FRESSE [Fre09] montre ce quasi-isomorphisme induit un quasi-isomorphisme :

$$(3.3.8) \quad C(A) \xrightarrow{\sim} \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$$

pour toute \mathbf{Ger}_n -algèbre cofibrante A (le corps de base est de caractéristique nulle, donc les modules à droite impliqués sont bien \mathfrak{S} -cofibrants et le théorème s'applique). \square

3.4 Coefficients quelconques

3.4.1 Résolution cofibrante

Soit $A \in {}_{\mathbf{Ger}_n} \mathcal{E}$ une algèbre quelconque, et soit $p : Q_A \xrightarrow{\sim} A$ une résolution cofibrante de A . Il y a donc un quasi-isomorphisme

$$(3.4.2) \quad \phi : C(Q_A) \xrightarrow{\sim} \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(Q_A)$$

Le foncteur d'extension des scalaires $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(Q_A)} \cdot$ préserve les quasi-isomorphismes entre modules cofibrants sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(Q_A)$ (c'est un adjoint de Quillen à gauche). Le module $\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(Q_A)$ est cofibrant sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(Q_A)$ d'après FRESSE [Fre09, §13.1.9].

Proposition 3.4.3. *Le module $C(A)$ est cofibrant comme $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$ -module pour toute \mathbf{Ger}_n -algèbre A .*

Démonstration. $C(A) = (B^n A \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)}, d)$ est quasi-libre (on travaille sur un corps donc $B^n A$ est bien libre sur \mathbb{k}) donc c'est bien un $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$ -module cofibrant. \square

Donc ϕ induit un quasi-isomorphisme entre modules cofibrants sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$:

$$(3.4.4) \quad C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1} Q_A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(Q_A) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(Q_A)} \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$$

Proposition 3.4.5. *Il y a un quasi-isomorphisme :*

$$C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1} Q_A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)) \xrightarrow{\sim} C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1} A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A))$$

également la filtration (et la différentielle), donc il induit un morphisme entre les suites spectrales $\mathcal{E}_Q^* \rightarrow \mathcal{E}^*$.

On a $\mathcal{E}_\nu^0 = T^n(s, \nu) \otimes A^{\otimes s} \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$. Par un calcul immédiat (les autres parties de la différentielle diminuent strictement le nombre de nœuds), pour $t \in T^n(s, \nu)$, $a_i \in A$ et $u \in \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$:

$$(3.4.13) \quad \delta^0(t \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_s \otimes u) = t \otimes \left(\sum_i \pm a_1 \otimes \dots \otimes da_i \otimes \dots \otimes a_s \right) \otimes u$$

Comme \mathbb{k} est un corps, la formule de Künneth implique (et de même pour Q_A) :

$$(3.4.14) \quad \mathcal{E}^1 = T^n(s) \otimes H_*(A)^{\otimes s} \otimes \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$$

Or p est un quasi-isomorphisme, donc $E_s^0 p$ induit un isomorphisme au niveau des pages \mathcal{E}^1 . Les filtrations \mathcal{F} sont bornées (c'est le point important), donc

$$(3.4.15) \quad E_s^0 p : (E_s^0 C_Q(A), d_s^0) \rightarrow (E_s^0 C(A), d_s^0)$$

est un quasi-isomorphisme. □

Proposition 3.4.16. *Il y a un zigzag de quasi-isomorphisme entre modules cofibrants sur $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$:*

$$\begin{array}{ccc}
 & & C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)) \\
 & \nearrow \sim & \\
 C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}Q_A, \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)) & & \\
 & \searrow \sim & \\
 & & \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(Q_A) \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(Q_A)} \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)
 \end{array}$$

3.4.17 Coefficients

Soit M une représentation de A . Les deux foncteurs

$$(3.4.18) \quad M \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)} \cdot \quad \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)}(\cdot, M)$$

préservent les quasi-isomorphismes entre modules cofibrants sur $\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$ (ce sont des adjoints à gauche de Quillen). En appliquant ces foncteurs au zigzag de la proposition 3.4.16, les modules suivants sont quasi-isomorphes :

$$(3.4.19) \quad \begin{aligned} C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, M) &\simeq \Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(Q_A) \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(Q_A)} M \\ C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, M) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(Q_A)}(\Sigma^{n-1} \Omega_{\text{Ger}_n}^1(Q_A), M) \end{aligned}$$

Par définition, les complexes de droite calculent respectivement l'homologie et la cohomologie de Gerstenhaber. Le calcul de l'homologie de ces complexes donne alors :

Théorème A. *Soit A une Ger_n -algèbre et M une représentation de A , alors :*

$$H_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}A, M) \cong \Sigma^{n-1} H_*^{\text{Ger}_n}(A, M) \quad H_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, M) \cong \Sigma^{n-1} H_{\text{Ger}_n}^*(A, M)$$

4 Extension de la construction du complexe

Soit A une \mathbf{Ger}_n -algèbre (dans la catégorie des dg-modules) et M une représentation de A . Nous avons défini un complexe qui calcule $H_{\mathbf{Ger}_n}^*(A, M)$:

$$C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, M) = (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B^n A, M), d)$$

Dans ce chapitre, nous étendons cette construction à un cas plus général, celui des bimodules abéliens sur \mathbf{Ger}_n .

4.1 Bimodules abéliens

Définition 4.1.1. Soit $A, M \in \mathcal{C}$ deux objets dans une catégorie monoïdale symétrique. Le \mathfrak{S} -module des morphismes $\text{End}_{A,M}$ est :

$$\text{End}_{A,M}(n) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A^{\otimes n}, M)$$

En particulier, si $M = A$, alors $\text{End}_{A,A} = \text{End}_A$ est une opérade. En règle générale ce ne sont pas des *endomorphismes*, malgré la notation.

Définition 4.1.2. Un **bimodule abélien** (aussi appelé bimodule infinitésimal par certains auteurs) sur une opérade \mathbf{P} est un \mathfrak{S} -module M muni de deux familles d'opérations :

$$\begin{aligned} \circ_i &: M(n) \otimes \mathbf{P}(m) \rightarrow M(n+m-1) \\ \circ_i &: \mathbf{P}(n) \otimes M(m) \rightarrow M(n+m-1) \end{aligned}$$

vérifiant des propriétés d'associativité, d'unitalité et de compatibilité.

Un \mathbf{P} -bimodule abélien est automatiquement un module à droite sur \mathbf{P} (en posant $m(\xi_1, \dots, \xi_k) = ((m \circ_1 \xi_1) \circ_{r_1+1} \xi_2) \circ_{r_1+r_2+1} \dots$), mais ce n'est pas nécessairement un module à gauche sur \mathbf{P} (\iff \mathbf{P} -algèbre).

Proposition 4.1.3. *Si A est une \mathbf{P} -algèbre et M est une représentation de A , alors $\text{End}_{A,M}$ est un \mathbf{P} -bimodule abélien.*

Démonstration. Les morphismes de structure sont définis, en notation point par point, par ($f \in \text{End}_{A,M}, p \in \mathbf{P}$) :

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} (f \circ_i p)(a_1, \dots, a_{n+m-1}) &= f(a_1, \dots, p(a_i, \dots, a_{i+m-1}), \dots, a_{n+m-1}) \\ (p \circ_i f)(a_1, \dots, a_{n+m-1}) &= p(a_1, \dots, f(a_i, \dots, a_{i+m-1}), \dots, a_{n+m-1}) \end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.5. Cette proposition a une réciproque. On remarque dans la première formule que la structure de \mathbf{P} -algèbre sur A induit automatiquement une structure de \mathbf{P} -module à droite sur $\mathbf{End}_{A,M}$; c'est uniquement dans le deuxième morphisme de structure que la représentation M de A intervient.

Soit donc A une \mathbf{P} -algèbre, alors une structure de A -représentation sur M est exactement équivalente à une structure de \mathbf{P} -bimodule abélien sur $\mathbf{End}_{A,M}$ qui étend la structure de \mathbf{P} -module à droite induite par A . La proposition fournit l'une des implications. Dans l'autre direction :

$$\begin{aligned} \circ_i : \mathbf{P}(r) \otimes \underbrace{\mathbf{End}_{A,M}(0)}_{\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A^{\otimes 0}, M) \cong M} &\rightarrow \mathbf{End}_{A,M}(r-1) \\ \iff \mathbf{P}(r) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \left(A \otimes \dots \otimes \underbrace{M}_i \otimes \dots \otimes A \right) &\rightarrow M \end{aligned}$$

qui donnent le morphisme de structure $\mathbf{P} \circ (A; M) \rightarrow M$ voulu (les axiomes de bimodule abélien impliquent que le morphisme vérifie toutes les propriétés voulues).

4.2 Idée du chapitre

Quand A est une \mathbf{Ger}_n -algèbre et M une représentation, on dispose d'une différentielle $d = b + \partial_\lambda$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B^n A, M)$, ce qui est équivalent, par adjonction (cf. (2.3.9)), à une différentielle d sur $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, \mathbf{End}_{A,M})$, où T^n est le \mathfrak{S} -module des arbres de hauteur n .

On dispose en fait de cette différentielle pour chaque structure de bimodule abélien sur $\mathbf{End}_{A,M}$.

Le but est de définir une différentielle $d_Z = d = b + \partial_\lambda$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, Z)$ et ce pour tout bimodule abélien Z sur \mathbf{Ger}_n , et qui se spécialiserait dans le cas $Z = \mathbf{End}_{A,M}$ en celle sur $C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, M)$. Le résultat est un complexe :

$$(4.2.1) \quad C(Z) = (\text{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, Z), b + \partial_\lambda)$$

La différentielle est en quatre parties : b' , ∂_λ' , b'' , ∂_λ'' qui correspondent au bord de Hochschild et à la différentielle de Chevalley-Eilenberg, sans et avec coefficients. Nous allons les définir une par une.

Définition 4.2.2. Un cas particulier important est le cas où $Z = \mathbf{P}$ est une opérade et où la structure de bimodule abélien provient d'un morphisme $\Phi : \mathbf{Ger}_n \rightarrow \mathbf{P}$ (en effet dans ce cas, \mathbf{P} est un bimodule sur \mathbf{Ger}_n , et on dispose de l'unité $\eta : I \rightarrow \mathbf{P}$, donc c'est un bimodule abélien¹). Dans le cas $\mathbf{P} = \mathbf{End}_A$ où A est une \mathbf{Ger}_n -algèbre, on retrouverait alors le complexe $C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, A)$. Ce complexe est alors noté :

$$C_\Phi(\mathbf{P}) = (\text{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, \mathbf{P}), b + \partial_\lambda)$$

1. En général un \mathbf{Q} -bimodule X n'est pas nécessairement un \mathbf{Q} -bimodule abélien : il faut que $X(1)$ contienne l'unité pour l'injecter dans $\gamma : \mathbf{Q}(r) \otimes X(k_1) \otimes \dots \otimes X(k_r) \rightarrow X(\sum k_i)$.

4.3 Définition des différentielles

4.3.1 Bord de Hochschild

Sans coefficients

Soit $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, \mathbb{Z})$ et $t \in T^n(r)$, on veut donc calculer $(b'\alpha)(t)$.

On a la relation $T^n = T^{n-1} \circ T^1$. Soit δ_1 la différentielle bar itérée agissant sur T^{n-1} . On va écrire $(b'\alpha)(t)$ comme une somme :

$$(4.3.2) \quad (b'\alpha)(t) = \alpha((\delta_1 \circ id)t) + (\delta_2\alpha)(t)$$

Soit $\mathbb{k}[\mathbb{Z}] = \mathbb{k}[u, u^{-1}]$ l'algèbre du groupe \mathbb{Z} , dont on note $\underline{k} := u^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) les générateurs. On va définir par récurrence $F_n : T^n(r) \rightarrow \mathbb{k}[\mathbb{Z}] \otimes T^n(r-1)$, qui va consister à « fusionner » deux arêtes successives et à garder la position de la fusion.

— Dans le cas $n = 1$:

$$(4.3.3) \quad F_1 \left(\begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad r \\ \searrow \quad \swarrow \end{array} \right) = \sum_{i=1}^n \underline{i} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad \widehat{i+1} \quad \dots \quad n \\ \searrow \quad \swarrow \end{array}$$

— Soit $t = (t_1, \dots, t_s) \in T^{n+1}(r)$, $t_i \in T^n(r_i)$, $\sum r_i = r$. Soit $F_n(t_j) = \sum_{(t_j)} \underline{k'_j} \otimes t''_j$. Alors on définit :

$$(4.3.4) \quad F_{n+1}(t) = \sum_j \sum_{(t_j)} \left(\sum_{i < j} r_i + k'_j \right) \otimes (t_1, \dots, t''_j, \dots, t_s)$$

Exemple 4.3.5.

$$F_2 \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \end{array} \right) = \underline{1} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array} + \underline{2} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array} + \underline{4} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array}$$

On définit alors, si $t \in T^n(r)$ et $F_n(t) = \sum_{(t)} \underline{k}' \otimes t''$:

$$(4.3.6) \quad (\delta_2\alpha)(t) = \alpha(t'') \circ_{k'} m$$

Exemple 4.3.7. Au lieu d'écrire le $\circ_{k'} m$, il est directement mis dans l'arbre :

$$\begin{aligned} (b'\alpha) \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \end{array} \right) &= \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \end{array} \right) + \alpha(\text{autres shuffles } (123; 45)) \\ + \alpha \left(\begin{array}{c} m(1,2) \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array} \right) &+ \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \quad m(2,3) \quad 4 \quad 5 \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array} \right) + \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad m(4,5) \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

Coefficients

On va définir par récurrence $R_n : T^n(r) \rightarrow \mathbb{k}[\mathbb{Z}] \otimes T^n(r-1)$. Ce morphisme correspond à retirer soit le premier, soit le dernier noeud de chaque sous-arbre de dernier niveau, et à donner son numéro dans l'arbre.

— Dans le cas $n = 1$:

$$(4.3.8) \quad R_1 \left(\begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad r \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right) = \underline{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \quad \dots \quad r \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} + \underline{r} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad r-1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array}$$

— On définit R_{n+1} à partir de R_n de la même manière que l'on définit F_{n+1} à partir de F_n .

Exemple 4.3.9.

$$R_2 \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right) = \underline{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} + \underline{3} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \\ + \underline{4} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} + \underline{5} \otimes \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array}$$

Soit $R_n t = \sum_{(t)} \underline{k'} \otimes t''$. Soit τ_i la permutation définie par

$$(4.3.10) \quad \tau_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & 1 & \dots \hat{i} \dots & n \end{pmatrix}$$

On définit alors :

$$(4.3.11) \quad (b''\alpha)(t) = \sum_{(t)} (\tau_{k'})_* m \circ_2 \beta(t'')$$

Exemple 4.3.12.

$$(b''\alpha) \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right) = m \circ_2 \alpha \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right) + m \circ_2 \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right) \\ + m \circ_2 \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right) + m \circ_2 \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \right)$$

4.3.13 Annexe : b et e^1 commutent

On revient à la définition homologique (la preuve cohomologique est similaire). On veut prouver $b(id \otimes e^1) = (id \otimes e^1)b$ (voir LODAY [Lod89] et FRESSE [Fre98 ; Fre06] pour la définition et les propriétés de e^1). Le fait que $b'e^1 = e^1b'$ ne dépend pas des

coefficients, donc cela découle des preuves de l'article de FRESSE [Fre06] (vu que $B^{n-1}A$ est effectivement une algèbre de Poisson – c'est la représentation qui pose problème).

Il reste donc à démontrer $b''(id \otimes e^1) = (id \otimes e^1)b''$. On fait le cas $n = 2$ pour simplifier, mais le cas général est identique (le point important (4.3.15) reste valable). On a (où \star est le produit de convolution, tout est bien défini par nilpotence des cogèbres) :

$$(4.3.14) \quad e^1 = \log_{\star}(id - \eta\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (id - \eta\varepsilon)^{\star k}$$

On note \sqcup le produit shuffle. Soit $x \otimes \underline{a} = x \otimes (a_1, \dots, a_s) \in A \otimes B^2A$, $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^{k_i}) \in BA$. Alors :

$$\begin{aligned} e^1(a_1, \dots, a_s) &= (a_1, \dots, a_s) \\ &\quad - \frac{1}{2}((a_1) \sqcup (a_2, \dots, a_s) + \dots + (a_1, \dots, a_{s-1}) \sqcup (a_s)) \\ &\quad + \frac{1}{3}((a_1) \sqcup (a_2) \sqcup (a_3, \dots, a_s) + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Si $a \in BA$, on note a' le même élément sans la première coordonnée, et a'' sans la dernière coordonnée (si $a = ()$ ou $a = (a^1)$, alors $a' = a'' = 0$).

$$\begin{aligned} b''(x \otimes \underline{a}) &= \sum_i a_i^1 x \otimes (\dots, a'_i, \dots) + a_i^{k_i} x \otimes (\dots, a''_i, \dots) \\ (1 \otimes e^1)b''(x \otimes \underline{a}) &= \sum_i a_i^1 x \otimes e^1(\dots, a'_i, \dots) + a_i^{k_i} x \otimes e^1(\dots, a''_i, \dots) \\ (1 \otimes e^1)(x \otimes \underline{a}) &= x \otimes \underline{a} \\ &\quad - \frac{1}{2}x \otimes ((a_1) \sqcup (a_2, \dots, a_s) + \dots + (a_1, \dots, a_{s-1}) \sqcup (a_s)) \\ &\quad - \frac{1}{3} \dots \end{aligned}$$

D'autre part un calcul direct montre que (avec les mêmes notations) :

$$\begin{aligned} &b''(x \otimes (a_1, \dots, a_s) \sqcup (b_1, \dots, b_t)) \\ &= \sum_{i=1}^s a_i^1 x \otimes (a_1, \dots, a'_i, \dots, a_s) \sqcup (b_1, \dots, b_t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^s a_i^{k_i} x \otimes (a_1, \dots, a''_i, \dots, a_s) \sqcup (b_1, \dots, b_t) \\ (4.3.15) \quad &+ \sum_{j=1}^s b_j^1 x \otimes (a_1, \dots, a_s) \sqcup (b_1, \dots, b'_j, \dots, b_t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^s b_j^{l_j} x \otimes (a_1, \dots, a_s) \sqcup (b_1, \dots, b''_j, \dots, b_t) \\ &= (1 \otimes (\bullet \sqcup \underline{b}))b''(x \otimes \underline{a}) + (1 \otimes (\underline{a} \sqcup \bullet))b''(x \otimes \underline{b}) \end{aligned}$$

Par récurrence une formule similaire est valide avec d shuffle produits. On en déduit immédiatement la relation voulue. Celle-ci permettra par la suite d'obtenir la commutativité de b et ∂_λ (exactement comme dans l'article [Fre06]).

4.3.16 Différentielle de Chevalley-Eilenberg

Grâce à l'isomorphisme $B^n A \cong S(L^c(\Sigma B^{n-1} A))$ pour tout A , on peut déduire un isomorphisme (à suspension près) de \mathfrak{S} -modules $\gamma : T^n \xrightarrow{\cong} \mathbf{Com} \circ s\mathbf{Lie}^c \circ T^{n-1}$ où :

- $\mathbf{Com}(r) = \mathbb{k}$ est l'opérade des algèbres commutatives ;
- s est la suspension opéradique ;
- $\mathbf{Lie}^c(r) = {}^n e^1 T^n(r) = \text{im}(e^1 : T^1(r) \rightarrow T^1(r))$;
- e^1 est l'idempotent Eulérien agissant sur $T^1 \cong T^c(\Sigma \mathbb{k})$.

Un élément typique de $\mathbf{Com} \circ \mathbf{Lie}^c \circ T^{n-1}(r)$ s'écrit donc $e^1(t_1) \dots e^1(t_s)$, où $t_i \in T^n(r_i)$ et $\sum r_i = r$.

Il suffit donc de définir $\tilde{\partial}_\lambda \beta$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Com} \circ \mathbf{Lie}^c \circ T^{n-1}, Z)$ et ensuite de poser $\partial_\lambda \alpha = \tilde{\partial}_\lambda(\alpha \circ \gamma^{-1}) \circ \gamma$.

Sans coefficients

On définit ∂_λ' par :

$$(4.3.17) \quad \tilde{\partial}_\lambda' \beta(e^1(t_1) \dots e^1(t_s)) = \sum_{i < j} \beta(e^1(t_1) \dots e^1[t_i, t_j] \dots e^1(t_s)) \circ_\gamma \lambda$$

où $[t_i, t_j]$ est le crochet shuffle itéré dans T^{n-1} ; on insère un λ à l'endroit où il y a un crochet de dernier niveau dans le crochet shuffle (cf. la définition 2.3.10 du crochet shuffle).

Exemple 4.3.18. Au lieu d'écrire le $\circ_\gamma \lambda$ il est directement mis dans l'arbre :

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_\lambda' \beta \left(e^1 \left(\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \swarrow \ \searrow \end{array} \right), e^1 \left(\begin{array}{c} 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array} \right) \right) = \\ \beta \left(e^1 \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \swarrow \ \searrow \end{array}; \begin{array}{c} 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array} \right] \right) \\ \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \swarrow \ \searrow \end{array}; \begin{array}{c} 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array}, \left[\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \swarrow \ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} 6 \ 7 \\ \swarrow \ \searrow \end{array} \right], \begin{array}{c} 8 \ 9 \\ \swarrow \ \searrow \end{array} \right) + \dots \\ \left[\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \swarrow \ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} 6 \ 7 \\ \swarrow \ \searrow \end{array} \right] = \begin{array}{c} 4 \ [5,6] \ 7 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array} + \begin{array}{c} [4,6] \ 5 \ 7 \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array} + \begin{array}{c} 4 \ 6 \ [5,7] \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \end{array} + \dots \end{aligned}$$

Avec coefficients

La définition est similaire à celle de b'' . On note $R_{n-1}u = \sum_{(u)} \underline{k}' \otimes u''$. Pour définir $\tilde{\partial}_\lambda' \beta(e^1(t_1) \dots e^1(t_s))$, on fait la somme sur chaque terme $e^1 t$ où $t = (u)$ est de poids 1 ($u \in T^{n-1}$) des

$$(4.3.19) \quad \sum_{(u)} (\tau_k)_* \lambda \circ_2 (e^1(t_1) \dots e^1((u'')) \dots e^1(t_s))$$

Les termes du type $e^1 t$ où le poids de t est > 1 sont envoyés sur zéro.

Exemple 4.3.20.

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_\lambda'' \beta \left(e^1 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & \searrow & / \end{array} \right), e^1 \left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ \searrow & / \end{array}, \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ \searrow & / \end{array} \right) \right) = \\ \lambda \circ_2 \beta \left(e^1 \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & \searrow \end{array} \right), e^1 \left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ \searrow & / \end{array}, \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ \searrow & / \end{array} \right) \right) \\ + \lambda \circ_2 \beta \left(e^1 \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & \searrow \end{array} \right), e^1 \left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ \searrow & / \end{array}, \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ \searrow & / \end{array} \right) \right) \end{aligned}$$

5 Lien avec le complexe de déformations

Nous avons construit un complexe $C_\Phi(\mathbb{P})$ qui généralise le complexe $C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, A)$. Dans ce chapitre, nous montrons que ce complexe (tronqué) est quasi-isomorphe au complexe de déformations $\text{Def}(\text{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P})$.

5.1 Dualité de Koszul

Certaines opérades particulières, les *opérades de Koszul*, ont des résolutions cofibrantes « minimales » explicites. C'est le cas de beaucoup d'opérades classiques, telles que **Ass**, **Com**, **Lie**... C'est une notion due à GINZBURG et KAPRANOV [GK94] et GETZLER et JONES [GJ94] pour les opérades quadratiques binaires et à GETZLER [Get95] et MARKL [Mar96] dans le cas quadratique général. On peut trouver des références chez LODAY et VALLETTE [LV12] et FRESSE [Fre04].

Définition 5.1.1. Une **donnée quadratique opéradique** est un couple (E, R) où $E \in \mathcal{M}$ et $R \subset \mathbb{O}(E)_{(2)}$, où $\mathbb{O}(E)$ est l'opérade libre sur E et $\mathbb{O}(E)_{(2)}$ est sa partie de poids 2. Les éléments de E sont les générateurs, ceux de R les relations.

Une donnée quadratique induit une opérade définie par générateurs et relations $\mathbb{P}(E, R) = \mathbb{O}(E)/(R)$. C'est le cas de **Ass**, **Com**, **Lie**, **Poi** et **Ger** _{n} . Une telle donnée quadratique induit aussi une **coopérade**, c'est-à-dire un comonoïde interne à (\mathcal{M}, \circ, I) . Les coopérades ont une description point par point similaire à celle des opérades. La coopérade en question $\mathbb{P}^c(E, R)$ est définie comme le noyau de $\mathbb{O}^c(E) \rightarrow \mathbb{O}^c(E)_{(2)}/R$.

Définition 5.1.2. Soit $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E, R)$ une opérade quadratique. La **coopérade duale de Koszul** $\mathbb{P}^!$ est :

$$\mathbb{P}^! = \mathbb{P}^c(\Sigma E, \Sigma^2 R)$$

L'**opérade duale de Koszul** $\mathbb{P}^!$ est donnée, où \mathbb{Q}^* correspond à l'opérade duale à une coopérade $\mathbb{Q}^*(n) = \mathbb{Q}(n)^*$, par :

$$\mathbb{P}^! = (\mathbb{P}^![-1])^*$$

On peut également définir l'opérade duale de Koszul à une coopérade, et alors $(\mathbb{P}^!)^! = \mathbb{P}$.

Définition 5.1.3. Soit \mathbb{P}^c une coopérade coaugmentée, et $\overline{\mathbb{P}^c}$ son coïdéal de coaugmentation. La **construction cobar** de \mathbb{P}^c est $\Omega\mathbb{P}^c$ est une opérade augmentée :

$$\Omega\mathbb{P}^c = \mathbb{O}(\overline{\mathbb{P}^c}[1])$$

munie d'une différentielle induite par la cocomposition de \mathbb{P}^c .

La construction cobar d'une coopérate mime la construction cobar des cogèbres, qui est elle-même le dual de la construction bar des algèbres associatives que nous avons vue. La théorie générale montre qu'il existe une application canonique $\Omega P^i \rightarrow P$ induite par un morphisme de torsion – voir LODAY et VALLETTE [LV12].

Théorème 5.1.4. *Quand P est une **opérate de Koszul**, le morphisme $\Omega P^i \rightarrow P$ est un quasi-isomorphisme. L'opérate ΩP^i est cofibrante.*

Exemple 5.1.5. Les opérades **Ass**, **Com**, **Lie**, **Poi** et \mathbf{Ger}_n sont toutes des opérades de Koszul. La table 5.A récapitule les (co)opérades duales de Koszul pour ces opérades. Le fait que $\mathbf{Lie}^! = \mathbf{Com}$, par exemple, constitue un début d'explication du fait que l'homologie des algèbres de Lie est l'homologie de Chevalley-Eilenberg (qui fait intervenir une algèbre commutative libre).

P	P^i	$P^!$
Ass	$\mathbf{Ass}^*[1]$	Ass
Com	$\mathbf{Lie}^*[1]$	Lie
Lie	$\mathbf{Com}^*[1]$	Com
Poi	$\mathbf{Poi}^*[1]$	Poi
\mathbf{Ger}_n	$\mathbf{Ger}_n^*[n]$	$\mathbf{Ger}_n[n-1]$

TABLE 5.A – Dualité de Koszul

5.2 Complexes de déformations

5.2.1 Algèbres à homotopie près

L'opérate des algèbres de Gerstenhaber \mathbf{Ger}_n est une opérade de Koszul (voir LODAY et VALLETTE [LV12] par exemple). Il y a donc une résolution cofibrante canonique :

$$(5.2.2) \quad \mathbf{Ger}_n^\infty = \Omega \mathbf{Ger}_n^i \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ger}_n$$

Cette opérade encode les algèbres de Gerstenhaber « à homotopie fortement cohérente près ». De manière informelle, dans une n -algèbre à homotopie près, les relations algébriques telles que l'associativité, la commutativité, la relation de Jacobi... sont seulement valables à homotopie près. Par exemple il existe une homotopie h telle que :

$$(5.2.3) \quad a(bc) - \pm(ab)c = dh(a, b, c) \pm h(da, b, c) \pm h(a, db, c) \pm h(a, b, db)$$

qui fait qu'en homologie, le produit est effectivement commutatif. Il existe, en plus de ces homotopies, des homotopies de dimension supérieure, qui les rendent triviales en homologie. Ces homotopies de dimension supérieure sont elles-mêmes rendues triviales

en homologie par de nouvelles homotopies, et ainsi de suite, jusqu'à rendre contractible l'espace des homotopies.

On peut par exemple penser au cas des algèbres A_∞ , où il existe plusieurs manières de multiplier n éléments (suivant les parenthésages); mais l'espace des parenthésages est contractible, au lieu de juste un point comme dans **Ass**. En fait, l'opérade A_∞ algébrique est obtenue de la même manière : $A_\infty = \Omega\text{Ass}^i$. De même, $E_\infty = \Omega\text{Com}^i$ et $L_\infty = \Omega\text{Lie}^i$.

5.2.4 Définition des complexes de déformations

Étant donné un morphisme d'opérades $\Phi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{P}$, où \mathbb{Q} est de Koszul, le complexe de déformations de Φ (voir la section 12.2 de LODAY et VALLETTE [LV12], ainsi que KONTSEVICH et SOIBELMAN [KS91] et CATTANEO et al. [Cat+05]) est :

$$(5.2.5) \quad \text{Def}(\mathbb{Q} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}) = \left(\prod_{r \geq 2} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_r}(\mathbb{Q}^i[1](r), P(r)); [\cdot, \cdot]; \delta + \partial_\Phi \right)$$

C'est un sous-module de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\mathbb{Q}^\infty, \mathbb{P})$ (car \mathbb{Q}^∞ est une opérade libre sur $\mathbb{Q}^i[1]$). Il a une structure d'algèbre de Lie différentielle graduée que nous allons maintenant décrire. Il est muni du produit de convolution \star^1 :

$$(5.2.6) \quad f \star g = \gamma_{(1)} \circ (f \circ_{(1)} g) \circ \nabla_{(1)}$$

où $\gamma_{(1)}$ est la composition (infinitésimale) de l'opérade \mathbb{P} et ∇ est la cocomposition (infinitésimale) de la coopérade \mathbb{Q}^i . On vérifie alors que c'est un produit *preLie*, et le crochet est donc :

$$(5.2.7) \quad [f, g] = \frac{1}{2}(f \star g - \pm g \star f)$$

La différentielle est la somme de δ , induite par celles de $\mathbb{Q}^i[1]$ et \mathbb{P} , et de la torsion ∂_Φ produite par l'élément de Maurer-Cartan

$$(5.2.8) \quad \tilde{\Phi} : \Omega\mathbb{Q}^i \rightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}$$

Pour rappel, un élément de Maurer-Cartan d'une dg-algèbre de Lie \mathfrak{g} est un élément $\alpha \in \mathfrak{g}_1$ vérifiant l'équation de Maurer-Cartan² :

$$(5.2.9) \quad \delta\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = \delta\alpha + \alpha \star \alpha = 0$$

C'est notamment le cas de $\tilde{\Phi}$, parce qu'il vient d'un morphisme d'opérades $\mathbf{Ger}_n^\infty \rightarrow \mathbb{P}$ (c'est le théorème 6.5.7 de LODAY et VALLETTE [LV12]). Un élément α de Maurer-Cartan induit une torsion $\partial_\alpha(x) = [\alpha, x]$ qui donne une différentielle $\delta + \partial$ de carré nul.

1. Ce produit est en général défini sur $\text{Hom}(C, A)$ où C est une cogèbre et A une algèbre.

2. On reconnaît l'équation qui décrit la platitude d'une connexion sur une variété.

Remarque 5.2.10. La proposition 12.2.4 de LODAY et VALLETTE [LV12] montre que si $\Psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{P}$ est un autre morphisme d'opérades, la somme $\Phi + \Psi$ est encore un morphisme d'opérades si et seulement si Ψ est un élément de Maurer-Cartan dans $\text{Def}(\mathbb{Q} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P})$. C'est ce qui justifie la terminologie « complexe de déformations » : $\Phi + \Psi$ est une « déformation » de Φ .

On peut également prendre un Ψ avec des coefficients dans $\mathbb{k}[t](t^2)$ (déformations infinitésimales) ou encore $\mathbb{k}[[\hbar]]$ (déformations formelles) et faire le lien avec la théorie de la déformation habituelle.

Nous allons ici nous concentrer sur les complexes de déformations du type :

$$\text{Def}(\text{Ger}_n \rightarrow \mathbb{P})$$

5.2.11 Lien avec la cohomologie opéradique

Cas d'une opérade d'endomorphismes

Considérons pour l'instant le cas $\mathcal{E} = \mathcal{C}$. Quand $\mathbb{P} = \text{End}_A$ est une opérade d'endomorphisme d'une Ger_n -algèbre $A \in {}_{\text{Ger}_n} \mathcal{E}$, alors le complexe précédent devient (en tant que module gradué) :

$$\begin{aligned} \text{Def}(\text{Ger}_n \rightarrow \text{End}_A) &= \prod_{r \geq 2} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_r}(\text{Ger}_n^i[1](r), \text{End}_A(r)) \\ (5.2.12) \qquad \qquad \qquad &= \prod_{r \geq 2} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Ger}_n^i[1](r) \otimes_{\mathfrak{S}_r} A^{\otimes r}, A) \end{aligned}$$

Comme l'opérade Ger_n est de Koszul, il y a une résolution quasi-libre canonique de toute Ger_n -algèbre :

$$(5.2.13) \qquad R_A = (\text{Ger}_n(\text{Ger}_n^i[1](A)), \partial) \xrightarrow{\sim} A$$

De plus, pour une algèbre libre $\text{Ger}_n \circ X$, $\Omega_{\text{Ger}_n}^1(\text{Ger}_n \circ X) \cong \mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(\text{Ger}_n \circ X) \otimes \Sigma X$. Donc :

$$\begin{aligned} \text{Def}(\text{Ger}_n \rightarrow \text{End}_A) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{\geq 2}(\text{Ger}_n^i[1](A), A) \\ (5.2.14) \qquad \qquad \qquad &= \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(R_A)}^{\geq 2}(\Omega_{\text{Ger}_n}^1(R_A), A) \end{aligned}$$

Et c'est donc le complexe qui calcule la cohomologie de Gerstenhaber $H_{\text{Ger}_n}^{*\geq 2}(A, A)$ pour la résolution cofibrante R_A . En effet, directement avec les définitions, la différentielle venant de Def est bien la différentielle utilisée pour calculer la cohomologie (les calculs sont en partie faits par LODAY et VALLETTE [LV12]).

Dans ce cas, il y a deux complexes quasi-isomorphes (la preuve était pour n'importe quelle résolution cofibrante) :

$$(5.2.15) \qquad C_{\text{Poi}}^*(B^{n-1}A, A) \simeq \Sigma^{n-1} \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(R_A)}(\Omega_{\text{Ger}_n}^1(R_A), A)$$

Cas d'une opérade quelconque

Pour un morphisme $\Phi : \mathbf{Ger}_n \rightarrow \mathbf{P}$ vers une opérade quelconque, nous avons défini un complexe :

$$(5.2.16) \quad C_\Phi(\mathbf{P}) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, \mathbf{P}), b + \partial_\lambda)$$

Ici $T^n \in \mathcal{M}$ est engendré par les arbres de hauteur n , et ce complexe se spécialise en $C_{\mathrm{Poi}}^*(B^{n-1}A, A)$ dans le cas $\mathbf{P} = \mathbf{End}_A$. Le but est de voir que ce complexe est quasi-isomorphe à $\Sigma^{n-1} \mathrm{Def}(\mathbf{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{P})$.

Dans le cas $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{E}$, et il y a donc un quasi-isomorphisme $C_\Phi(\mathbf{End}_A) \simeq \Sigma^{n-1} \mathrm{Def}(\mathbf{Ger}_n \rightarrow \mathbf{End}_A)$. Nous voulons donc voir si la preuve s'étend à $A \in \mathcal{E}$ pour d'autres catégories \mathcal{E} au-dessus de \mathcal{C} .

En effet, si \mathbf{P} est une opérade, on peut considérer $\mathcal{E} = \mathcal{M}_{\mathbf{P}}$ la catégorie des \mathbf{P} -modules à droite. On peut voir \mathbf{P} comme un \mathbf{P} -module à droite via la loi de composition $\mathbf{P} \circ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$.

Proposition 5.2.17. *L'object $\mathbf{End}_{\mathbf{P}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{P}}$ s'identifie à $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{\mathbf{P}}$.*

Démonstration. D'après FRESSE [Fre09, §7.1], le produit tensoriel $\mathbf{P}^{\otimes r}$ dans $\mathcal{M}_{\mathbf{P}}$ s'identifie à $F_r \circ \mathbf{P}$, où $F_r = I^{\otimes r}$. De plus :

$$(5.2.18) \quad \mathbf{End}_{\mathbf{P}}(r) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathbf{P}}}(\mathbf{P}^{\otimes r}, \mathbf{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathbf{P}}}(F_r \circ \mathbf{P}, \mathbf{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F_r, \mathbf{P}) \cong \mathbf{P}(r)$$

□

Nous obtiendrions alors, pour $\mathcal{E} = \mathcal{M}_{\mathbf{P}}$, un quasi-isomorphisme

$$(5.2.19) \quad C_\Phi^{\geq 2}(\mathbf{End}_{\mathbf{P}}) \simeq \Sigma^{n-1} \mathrm{Def}(\mathbf{Ger}_n \rightarrow \mathbf{End}_{\mathbf{P}}) \cong \Sigma^{n-1} \mathrm{Def}(\mathbf{Ger}_n \rightarrow \mathbf{P})$$

5.3 Adaptation de la preuve

Nous voulons donc adapter la preuve de $C_\Phi(\mathbf{End}_A) \simeq \Sigma^{n-1} \mathrm{Def}(\mathbf{Ger}_n \rightarrow \mathbf{End}_A)$ à $A \in_{\mathbf{Ger}_n} \mathcal{E}$, où $\mathcal{E} = \mathcal{M}_{\mathbf{P}}$. Les constructions de $\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$, $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$, et la définition d'une représentation de A s'adaptent [Fre09, §4] toutes à ce cas.

Le module sous-jacent à $C_\Phi(\mathbf{End}_A)$ est $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, \mathbf{End}_A)$, qui est isomorphe par adjonction à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S(T^n, A), A)$. Par analogie considérons le module (avec le produit tensoriel dans \mathcal{E}) :

$$(5.3.1) \quad \beta^n(A, M) = (T^n \circ A) \otimes M$$

Dans le cas $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, c'est exactement le module sous-jacent à $C_*^{\mathrm{Poi}}(B^{n-1}A, M)$. Le produit, le crochet, les différentielles b et ∂_λ sur $\beta^n(A, M)$ sont définies exactement de la même manière. A est une \mathbf{Ger}_n -algèbre, donc $S(T^{n-1}, A)$ est une Poi -algèbre via les mêmes formules. Les définitions des différentielles b' , b , ∂_λ' , ∂_λ sont explicites et purement algébriques, et les mêmes formules définissent des différentielles respectivement sur $T^n \circ A$ et $(T^n \circ A) \otimes M$.

Par construction, la différentielle que l'on retrouve sur

$$(5.3.2) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)}(\beta^n(A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)), A) \cong C_\Phi(\mathbf{End}_A)$$

est exactement la différentielle définie plus tôt.

5.3.3 Coefficients triviaux

Dans la première partie de la preuve, nous considérons $A = \mathbf{Ger}_n \circ X$ une \mathbf{Ger}_n -algèbre libre, $X \in \mathcal{M}$ un \mathfrak{S} -module *connexe* ($X(0) = 0$), et $M = \mathbb{k}$ l'unité du produit tensoriel dans $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ (concentré en degré 0).

La preuve du quasi-isomorphisme entre $\beta^n(\mathbf{Ger}_n \circ X, \mathbb{k})$ et $\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)} \mathbb{k} \cong \Sigma X$ reposait sur FRESSE [Fre11, §6.3], qui prouve $B^n \mathbf{Com}(N) \simeq \mathbf{Com}(\Sigma^n N)$ pour $N \in \mathcal{M}$ vérifiant certaines propriétés. Cela s'applique ici à $N = \Lambda^{1-n} \mathbf{Lie}(X)$, qui vérifie toutes les propriétés : il est connexe ($N(0) = 0$ car X est connexe), il a une différentielle triviale, et chaque $N(r)$ est projectif sur le corps \mathbb{k} .

Le reste de la preuve est complètement algébrique et s'adapte sans problème au cas $\mathcal{E} = \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ (en changeant simplement $S(Z)$ en $\mathbf{Com} \circ Z$). L'argument de suite spectrale, en particulier, est toujours valide (en regardant chaque arité séparément, vu la définition des équivalences faibles).

5.3.4 Coefficients universels

La deuxième partie de la preuve considère $A = \mathbf{Ger}_n \circ X$ et $M = \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$. Il y a toujours une projection $\pi : S(T^n, A) \rightarrow S(\Sigma^n I, A) = \Sigma^n A$ induite par la projection $T^n \rightarrow \Sigma^n I$ (les arbres ont un degré non nul). De même il y a toujours un morphisme $\Sigma A \rightarrow \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$, et la composition des deux donne :

$$(5.3.5) \quad \phi : \beta^n(A, \mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)) \rightarrow \Sigma^{n-1} \Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$$

La vérification que ϕ est un morphisme de complexes est algébrique et s'étend donc au cas présent. La description de FRESSE [Fre09, §4] de $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(\mathbf{Ger}_n \circ X) = \mathbf{Ger}_n[1] \circ X$ est toujours valable et donne lieu à la même filtration, puis la même suite spectrale, et ϕ reste un morphisme de suites spectrales. Il y a toujours la graduation en poids sur $S(T^n \circ \mathbf{Ger}_n, X)$, et donc l'argument de convergence s'adapte sans problèmes.

5.3.6 Algèbres cofibrantes

Cette partie de la preuve utilise les théorèmes de FRESSE [Fre09], qui sont valables pour toute catégorie \mathcal{E} au-dessus d'une catégorie de base \mathcal{C} ; ils s'adaptent donc ici.

5.3.7 Coefficients quelconques

Maintenant soit A une algèbre quelconque et $Q_A \xrightarrow{\sim} A$ une résolution cofibrante de A . La preuve se transpose alors à $\mathcal{E} = \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, en remplaçant $C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}X, Y)$ par $\beta^n(X, Y)$:

Le théorème de FRESSE [Fre09] qui donne $\Omega_{\mathbf{Ger}_n}^1(A)$ cofibrant sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$ est toujours valable. Les produits tensoriels, les foncteurs \mathbf{Hom} sont encore des adjoints à gauche de Quillen dans la catégorie des $\mathcal{U}_{\mathbf{Ger}_n}(A)$ -modules donc préservent toujours les quasi-isomorphismes entre modules cofibrants. Il y a toujours une filtration sur $S(T^n, A)$ par le nombre de feuilles puis par le nombre de nœuds, avec les mêmes formules pour les différentielles bar ; la formule de Künneth s'applique toujours.

Finalement, le résultat s'applique à $M = A$ et la résolution cofibrante R_A , et il y a donc un quasi-isomorphisme entre $C_{\Phi}^{\geq 2}(\text{End}_A)$ et $\Sigma^{n-1} \text{Def}(\text{Ger}_n \rightarrow \text{End}_A)$. En appliquant cela à \mathbb{P} vu comme un \mathbb{P} -module à droite, finalement :

Théorème B. *Les deux complexes sont quasi-isomorphes :*

$$C_{\Phi}^{\geq 2}(\mathbb{P}) \simeq \Sigma^{n-1} \text{Def}(\text{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P})$$

Leur homologie est notée $H_{\text{Ger}_n}^{\geq 2}(\mathbb{P})$. On définit également $H_{\text{Ger}_n}^1(\mathbb{P}) = H^1(C_{\Phi}(\mathbb{P}))$.*

6 Applications

6.1 Complexes de graphes

Dans l'étude de la conjecture de la formalité, KONTSEVICH [Kon97] a introduit plusieurs complexes de graphes. Ce sont des opérades (différentielles graduées) décrites de manière combinatoire par des graphes.

WILLWACHER [Wil14] étudie la cohomologie de ces complexes de graphes et les relie à des complexes de déformations. KONTSEVICH [Kon99] montre l'existence d'un complexe de graphes \mathbf{Graphs}_2 et d'un quasi-isomorphisme $\mathbf{Ger}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Graphs}_2$ (on peut aussi trouver un résumé par ŠEVERA et WILLWACHER [ŠW11] et LAMBRECHTS et VOLIĆ [LV14]). Il relie ensuite la cohomologie du complexe $\mathrm{Def}(\mathbf{Ger}_2 \rightarrow \mathbf{Graphs}_2)$ (qu'il note $\mathrm{Def}(hoe_2 \rightarrow \mathbf{Graphs}_2)$), où $hoe_2 = \mathbf{Ger}_2^\infty$ signifie « homotopy e_2 » à la cohomologie d'un autre complexe de graphes, $H(\mathbf{GC}_2)$.

On peut donc utiliser les techniques de ce mémoire pour obtenir des informations sur $H(\mathbf{GC}_2)$ en calculant la cohomologie du complexe $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T^2, \mathbf{Graphs}_2), b + \partial_\lambda)$. Plus généralement, ces complexes sont définis en dimension supérieure ($\mathbf{Graphs}_n, \mathbf{GC}_n$) et il y a toujours un quasi-isomorphisme $\mathbf{Ger}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{Graphs}_n$: nous sommes donc ramenés à calculer la cohomologie du complexe $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T^n, \mathbf{Graphs}_n), b + \partial_\lambda)$.

6.2 Espaces de fonctions et homotopie

6.2.1 Ensembles simpliciaux

Les ensembles simpliciaux sont des modèles purement combinatoires des espaces topologiques, très utilisés en théorie de l'homotopie. La raison est que la catégorie $s\mathcal{S}et$ des ensembles simpliciaux forme une catégorie modèle munie d'une équivalence de Quillen avec $\mathcal{T}op$. D'un point de vue homotopique, il n'y a donc pas de différence entre les espaces topologiques et les ensembles simpliciaux. La référence principale pour cette section est GOERSS et JARDINE [GJ99].

Définition 6.2.2. La **catégorie simpliciale** Δ a :

- pour objets les ensembles finis $\underline{n} = \{0, \dots, n\}$;
- pour morphismes les applications croissantes.

Définition 6.2.3. Un **ensemble simplicial** est un foncteur contravariant $\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{S}et$. La catégorie des ensembles simpliciaux est notée $s\mathcal{S}et$. Plus généralement, un **objet simplicial** dans une catégorie \mathcal{C} est un foncteur contravariant $\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$; la catégorie est notée $s\mathcal{C}$.

On peut décrire les objets simpliciaux en termes combinatoires : un objet $X = X_\bullet \in s\mathcal{C}$ est équivalent à la donnée d'une suite d'objets $X_n \in \mathcal{C}, n \geq 0$, et de morphismes « faces » $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}, 0 \leq i \leq n$ et « dégénérescences » $s_j : X_n \rightarrow X_{n+1}, 0 \leq j \leq n$, vérifiant des identités bien connues.

Les simplexes standards Δ^n sont des objets simpliciaux particuliers. Ce sont les foncteurs représentables :

$$(6.2.4) \quad \Delta^n = \text{Hom}_\Delta(\cdot, \underline{n})$$

Ils sont analogues aux simplexes standards topologiques :

$$(6.2.5) \quad |\Delta^n| = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$$

L'objet $\Delta^\bullet = \text{Hom}_\Delta : \Delta \times \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{S}et$ forme un objet **cosimplicial** dans la catégorie des ensembles simpliciaux, ie. c'est un foncteur covariant $\Delta \rightarrow s\mathcal{S}et$. En général on note $c\mathcal{C}$ la catégorie des objets cosimpliciaux dans \mathcal{C} . De même, $|\Delta^\bullet| \in c\mathcal{T}op$ avec des cofaces et codégénérescences évidentes (les cofaces sont l'inclusion des faces en question, les codégénérescences sont les projections).

Le bord $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ est le $n - 1$ -squelette de Δ^n : jusqu'au niveau $n - 1$ les deux ont les même simplexes, puis à partir du niveau n $\partial\Delta^n$ ne contient plus que les simplexes dégénérés de Δ^n . Il est engendré par les simplexes $d_i i_n$, où $i_n \in \Delta_n^n$ correspond à l'identité (le seul n -simplexe non dégénéré de Δ^n). La i ème corne $\Lambda_i^n \subset \partial\Delta^n$ est engendrée par $d_k i_n$ pour $k \neq i$.

Définition 6.2.6. Une **fibration de Kan** $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions $\Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n$:

$$(6.2.7) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \partial\Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

On peut également définir la notion de groupes d'homotopie $\pi_i : s\mathcal{S}et_* \rightarrow \mathcal{G}rp$. C'est le groupe des classes d'homotopie d'applications pointées $\Delta^n / \partial\Delta^n = S^n \rightarrow X$. Ils vérifient les mêmes propriétés que les groupes d'homotopie usuels $\pi_i : \mathcal{T}op_* \rightarrow \mathcal{G}rp$. Une équivalence faible est une application induisant un isomorphisme sur chaque groupe d'homotopie.

Théorème 6.2.8. *La catégorie $s\mathcal{S}et$ munie des équivalences faibles, des fibrations de Kan et des inclusions (comme cofibrations) est une catégorie modèle.*

La **réalisation géométrique** d'un ensemble simplicial X est l'espace topologique $|X|$ défini par :

$$(6.2.9) \quad |X| = \bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times |\Delta|^n / \sim$$

où la relation d'équivalence est donnée par $(f^*x, y) \sim (x, f_*y)$ pour $x \in X_n$, $y \in \Delta^m$ et $f \in \text{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n})$. On peut donc également la voir comme une cofin [Kel82] :

$$(6.2.10) \quad |X| = \int^{n \in \Delta} X_n \times |\Delta^n| = X \otimes_\Delta |\Delta|$$

Cette expression est à contraster avec le lemme de co-Yoneda [nLa12], qui dit que tout préfaisceau est une colimite de foncteurs représentables :

$$(6.2.11) \quad X = \int^n X_n \times \underbrace{\text{Hom}_\Delta(\cdot, n)}_{=\Delta^n} = X \otimes_\Delta \Delta$$

Ce foncteur $|\cdot| : sSet \rightarrow \mathcal{T}op$ est adjoint à gauche au foncteur « chaînes singulières » $S_* : \mathcal{T}op \rightarrow sSet$.

Théorème 6.2.12. *L'adjonction entre les ensembles simpliciaux et les espaces topologiques est une équivalence de Quillen :*

$$|\cdot| : sSet \rightleftarrows \mathcal{T}op : S_*$$

La catégorie $sSet$ est un candidat pour la notion de catégorie modèle *simpliciale*. C'est une catégorie munie de foncteurs hom supplémentaires et une structure modèle compatible avec la structure simpliciale. Ici, $sSet$ est munie d'un foncteur d'**espace de fonctions** :

$$(6.2.13) \quad \text{Map}_{sSet} : sSet^{op} \times sSet \rightarrow sSet$$

qui doit vérifier de nombreuses propriétés. Par exemple, $\text{Map}(X, Y)_0 = \text{Hom}(X, Y)$ et $\pi_0 \text{Map}(X, Y) = [X, Y] = \text{Hom}(X, Y) / \sim$. Il est défini par

$$(6.2.14) \quad \text{Map}(X, Y)_\bullet = \text{Hom}(X, Y^{\Delta^\bullet})$$

où $Y^{\Delta^\bullet} \in csSet$ est donné par $\text{Hom}(\Delta^n, Y)$ en degré cosimplicial n . Cette notion s'étend à de nombreuses catégories, en particulier à la catégorie sOp des opérades simpliciales.

6.2.15 Application de la cohomologie de Gerstenhaber

FRESSE [Fre15] étudie les espaces de fonctions $\text{Map}(E_m, E_n^\wedge)$, où E_n^\wedge est un modèle rationnel des opérades E_n ; en particulier leurs groupes d'homotopie $\pi_* \text{Map}(E_m, E_n^\wedge)$. Plus généralement on peut utiliser la cohomologie de Gerstenhaber pour étudier $\pi_* \text{Map}(E_m, R)$ où R est une E_m -algèbre dans les opérades simpliciales. Les calculs faits ici sont une adaptation de ceux de FRESSE [Fre15].

Tours de fibrations

Pour ce faire, une résolution cofibrante particulière est utilisée, la résolution cotriple [Fre09]. En effet si M est une monade et A une algèbre sur M , la réalisation¹ du complexe bar

$$(6.2.16) \quad |B_{\bullet}(M, M, A)| = |M^{\bullet+1}(A)| \xrightarrow{\sim} A$$

est une résolution cofibrante de A . Cette construction marche en particulier pour les opérades (le foncteur $S(\mathbb{P})$ est une monade) et obtenir une résolution cofibrante de toute algèbre sur \mathbb{P} . On peut aussi l'appliquer à la monade « opérade libre » $\mathbb{O} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$; une opérade est par définition une algèbre sur la monade \mathbb{O} . On obtient donc une résolution cofibrante pour n'importe quelle opérade \mathbb{P} :

$$(6.2.17) \quad |\mathbf{Res}_{\bullet}(P)| = |B_{\bullet}(\mathbb{O}, \mathbb{O}, P)| = |\mathbb{O}^{\bullet+1}(P)| \xrightarrow{\sim} P$$

Par des arguments homotopiques, on peut donc remplacer E_m par $|\mathbf{Res}_{\bullet}(E_m)|$ dans $\pi_* \text{Map}(E_m, R)$. Or, par dualité, on a :

$$(6.2.18) \quad \text{Map}(|X_{\bullet}|, Y) = \text{Tot Map}(X_{\bullet}, Y)$$

où Tot est la **totalisation** d'un objet cosimplicial. C'est une notion complètement duale à celle de réalisation :

$$(6.2.19) \quad \text{Tot } A^{\bullet} = \int_{n \in \Delta} (A^n)^{\Delta^n} = \text{Hom}_{csSet}(\Delta^{\bullet}, A^{\bullet})$$

Il existe une suite spectrale permettant de calculer les groupes d'homotopie d'une totalisation, la suite spectrale de Bousfield-Kan. Elle apparaît dans BOUSFIELD et KAN [BK72] et est développée par BOUSFIELD [Bou89]; on peut également trouver une description de celle-ci dans les chapitres VI et VIII de GOERSS et JARDINE [GJ99]. Elle a la forme suivante, pour un $X \in csSet$ fibrant (au sens de REEDY [Ree73]) pointé :

$$(6.2.20) \quad E_{s,t}^2 = \pi^s \pi_t X \implies \pi_{t-s} \text{Tot } X \quad t - s \geq 0$$

Deux difficultés apparaissent dans l'étude de cette suite spectrale :

- Elle est définie pour $t - s \geq 0$. Pour $t - s = 1$, les groupes en question ne sont pas abéliens; pour $t - s = 0$, ce ne sont même plus des groupes mais seulement des ensembles pointés. Les suites exactes qui apparaissent ne sont exactes que comme ensembles pointés, et de plus $E_{s,s}^{r+1}$ est seulement inclus dans $H(E_{s,s}^r)$ (et pas forcément égal). La définition de E^2 change également : pour $t - s \geq 2$, $\pi^s \pi_t = H^s N^* \pi_t$, mais une définition ad-hoc est utilisée pour $E_{s,s}^2$ et $E_{s,s+1}^2$.
- La convergence est loin d'être automatique; une condition nécessaire et suffisante est donnée par le lemme de convergence complète :

$$(6.2.21) \quad \varinjlim_r E_{s,t}^r = 0 \quad t - s \geq 1$$

1. Définie de la même manière par une cofin.

Ici, on dispose donc d'une suite spectrale :

$$(6.2.22) \quad E_{s,t}^2 = \pi^s \pi_t \text{Map}_{s\mathcal{O}p}(\mathbf{Res}_\bullet(E_m), R) \implies \pi_{t-s} \text{Map}_{s\mathcal{O}p}(E_m, R)$$

où R est une opérade simpliciale, et \mathbf{Ger}_m est vue comme une opérade simpliciale (en modules gradués) constante (ie. $(\mathbf{Ger}_m)_\bullet = \mathbf{Ger}_m$ et $d_i = s_j = id$).

Cohomologie de Gerstenhaber

Dans toute cette section, la « catégorie de base » est celle des modules ; les préfixes dg , gr , s indiquent respectivement « différentiel gradué », « gradué » et « simplicial ». L'opérade $\mathbf{Res}_k(\mathbf{Ger}_m) = \mathbb{O}(\mathbb{O}^k \mathbf{Ger}_m)$ est une opérade libre, donc :

$$(6.2.23) \quad E_{s,t}^2 \cong \pi^s \pi_t \text{Map}_{s\mathcal{M}}(\mathbb{O}^\bullet E_m, R)$$

Si G est un groupe simplicial, alors $\pi_i G = H_i(N_* G)$ (voir CURTIS [Cur71, §3]). Ici, $N_*(G)$ est le complexe des chaînes normalisées de G qui apparaît dans la correspondance de Dold-Kan. Pour un groupe simplicial (non nécessairement abélien), il est défini par :

$$(6.2.24) \quad N_n(G) = \bigcap_{i=1}^n \ker(d_i) \subset G_n$$

et la différentielle est $\delta = d_0$ restreint à $N_n G$.

Remarque 6.2.25. En général, l'équivalence de Dold-Kan dit que N_* est une équivalence de Quillen entre la catégorie des modules simpliciaux et la catégorie des dg-modules (étant donné un anneau de base fixé). Quand les groupes sont abéliens, la description de $N_* A$ est plus simple.

On a donc :

$$(6.2.26) \quad E_{s,t}^2 \cong \pi^s H_t N_* \text{Hom}_{s\mathcal{M}}(\mathbb{O}^\bullet E_m, R)$$

En effet, $\text{Map}_{s\mathcal{M}}(X, Y)$ est bien l'ensemble simplicial sous-jacent au module simplicial $\text{Hom}_{s\mathcal{M}}(X, Y)$ (il s'agit d'un foncteur hom interne). Or on sait que l'on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$(6.2.27) \quad N_* \text{Hom}_{s\mathcal{C}}(X, Y) \cong \tau_* \text{Hom}_{dg\mathcal{C}}(N_* X, N_* Y)$$

où τ_* est la restriction en degré positif. Donc (où l'on utilise le théorème 1.4.17) :

$$(6.2.28) \quad \begin{aligned} E_{s,t}^2 &\cong \pi^s H_t \tau_* \text{Hom}_{dg\mathcal{M}}(N_* \mathbb{O}^\bullet E_m, N_* R) \\ &\cong \pi^s \text{Hom}_{gr\mathcal{M}}(\mathbb{O}^\bullet \mathbf{Ger}_m, H_t N_* R) \\ &\cong \pi^s \text{Hom}_{gr\mathcal{M}}(\mathbb{O}^\bullet \mathbf{Ger}_m, H_t R) \end{aligned}$$

Soit $\varphi : E_m \rightarrow R$ le morphisme de structure d'algèbre E_m de R . Alors $H_* \varphi : H_* E_m = \mathbf{Ger}_m \rightarrow H_* R$ induit une structure de \mathbf{Ger}_m algèbre sur $H_* R$. De plus on sait que pour

une opérade libre, une dérivation $\mathbb{O}(X) \rightarrow A$ où A est une $\mathbb{O}(X)$ -algèbre est uniquement déterminée par un morphisme de \mathfrak{S} -modules $X \rightarrow A$ et vice-versa. En particulier ici :

$$(6.2.29) \quad E_{s,t}^2 \cong \pi^s \text{Der}_{dg\mathcal{O}p}(\text{Res}_\bullet(\mathbf{Ger}_m), H_t R)_{H_*\varphi}$$

En caractéristique nulle, l'opérade \mathbf{Ger}_m est \mathfrak{S} -cofibrante, donc par les théorèmes du §13.3 de FRESSE [Fre09], on obtient finalement :

$$(6.2.30) \quad E_{s,t}^2 \cong H_{\mathbf{Ger}_m}^s(H_t R)_{H_*\varphi} \implies \pi_{t-s} \text{Map}_{s\mathcal{O}p}(E_m, R)$$

En particulier, si $\varphi : E_m \rightarrow E_n$ est le morphisme qui induit en homologie $\mu \mapsto \mu$ et $\lambda \mapsto 0$ ($m < n$), on obtient :

$$(6.2.31) \quad E_{s,t}^2 = H_{\mathbf{Ger}_m}^*(\mathbf{Ger}_n) \implies \pi_{t-s} \text{Map}_{s\mathcal{O}p}(E_m, E_n)_{\mathbb{Q}}$$

Cet isomorphisme n'est plus valable en caractéristique non nulle : l'opérade \mathbf{Ger}_m n'est plus cofibrante, et la notion de « cohomologie de Gerstenhaber » n'a plus de sens comme définie ici. Néanmoins, le complexe $C_{H_*\varphi}(\mathbf{Ger}_n)$ reste bien défini.

6.3 Longs noeuds

Soit $n \geq 2m + 2$ deux entiers. Les articles de ARONE et TURCHIN [AT14; AT15] définissent des analogues en dimension supérieure des espaces des « longs noeuds ». Plus précisément, soit $i : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ un plongement linéaire fixé ; l'espace $\text{Emb}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est défini comme l'espace des plongements qui coïncident avec i en-dehors d'un compact. Cet espace est un ouvert dense de l'espace analogue avec des immersions à la place des plongements, et on note $\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ la fibre homotopique de l'inclusion.

D'un autre côté, soit $\iota : \mathbf{D}_m \hookrightarrow \mathbf{D}_n$ l'inclusion des opérades des petits disques. Elle induit en homologie un morphisme $\iota_* : \mathbf{Ger}_m \rightarrow \mathbf{Ger}_n$ ($m \geq 2$, sinon c'est un morphisme $\mathbf{Ass} \rightarrow \mathbf{Ger}_n$) qui envoie μ sur μ et λ sur 0. Alors, avec des coefficients rationnels :

Théorème 6.3.1 (ARONE et TURCHIN [AT15, Theorem 5.1]). *Les deux complexes sont quasi-isomorphes :*

$$C_*^{\mathbb{Q}}(\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \simeq \Sigma^{m+1} \text{Def} \left(H_*(\mathbf{D}_m; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\iota_*} H_*(\mathbf{D}_n; \mathbb{Q}) \right)$$

Ce théorème est une généralisation du théorème de LAMBRECHTS, TURCHIN et VOLIĆ [LTV10], qui démontrent le cas $m = 1$, où le complexe calcule alors l'homologie de Hochschild de \mathbf{Ger}_n . Quand $m \geq 2$, le complexe qui calcule $H_{\mathbf{Ger}_m}^*(\mathbf{Ger}_n)$ pourrait donc permettre d'obtenir des informations sur les espaces des longs noeuds.

Dans le cas $m = 1$, on peut dire plus, d'après des travaux indépendants de SONGHA-FOUO TSOPMÉNÉ [Son13] et MORIYA [Mor12]. En effet, $H_*(\mathbf{D}_1) \cong \mathbf{Ass}$, et le complexe de déformations est isomorphe au complexe de Hochschild de \mathbf{Ger}_n . On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$(6.3.2) \quad H_*(\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n); \mathbb{Q}) \cong HH(\mathbf{Ger}_n; \mathbb{Q})$$

Or, $\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est une algèbre E_2 . La structure en question vient d'un résultat de MCCLURE et SMITH [MS04], qui donnent une action d'une opérade \mathcal{D}_2 sur $\text{hoTot } \mathcal{O}^\bullet$, et du fait que $\text{hoTot}(\mathcal{K}_n^\bullet) \simeq \overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (il s'agit d'un résultat de SINHA [Sin06]).

SONGHAFUO TSOPMÉNÉ [Son13] considère l'opérade de KONTSEVICH [Kon99] \mathcal{K}_n , définie de manière similaire à l'opérade de Fulton-MacPherson (section 1.4.9) en n'utilisant que les $\theta_{ij} : \mathcal{K}_n(r) \subset (S^{n-1})^{\binom{r}{2}}$. C'est une opérade E_n .

L'application $F(D^n, r) \rightarrow \mathcal{K}_n$ n'est pas un plongement, mais \mathcal{K}_n a l'avantage d'être une algèbre associative : $\text{Ass} \rightarrow \mathcal{K}_n$. On peut définir l'homologie de Hochschild $HH(H_*\mathcal{K}_n; \mathbb{R})$. Or il est bien connu que l'homologie de Hochschild est une 2-algèbre de GERSTENHABER [Ger63]; c'est même une des raisons qui motive l'introduction des algèbres de Gerstenhaber.

Théorème 6.3.3 (SONGHAFUO TSOPMÉNÉ [Son13, Corollary 1.6]; MORIYA [Mor12]).
Il existe un isomorphisme de Ger₂-algèbres, pour $n \geq 4$:

$$H_*(\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n); \mathbb{R}) \cong HH(H_*\mathcal{K}_n; \mathbb{R})$$

6.4 Autres applications

D'autres applications sont encore possibles. Une première application utilise le fait que $C_\Phi(\mathbb{P})$ est un bicomplexe avec deux différentielles b et ∂_λ . Les calculs sont généralement faits (via une suite spectrale) en calculant d'abord l'homologie par rapport à b . En inversant l'ordre, on pourrait s'attendre à obtenir d'autres résultats.

Si maintenant le morphisme $\Phi : \text{Ger}_n \rightarrow \mathbb{P}$ factorise par Com , ie. \mathbb{P} est une algèbre commutative avec un crochet nul, alors la différentielle b est une somme $\delta + \partial_1 + \dots + \partial_n$, où δ est la différentielle interne, et ∂_i est la partie de la différentielle bar agissant sur le i ème niveau des arbres. En utilisant des filtrations adaptées, il est possible de produire des suites spectrales qui permettent de voir la cohomologie de Gerstenhaber comme une sorte d'homologie de Hochschild itérée (chaque ∂_i est un bord de Hochschild).

Notations

Ass	Opétrade des algèbres associatives, 7
BA	Complexe bar de A , 22
\mathcal{C}	Catégories des dg-modules sur \mathbb{k} , 1
$C_{\Phi}(\mathbb{P})$	Complexe étendu, 37
$C_*^{\text{Poi}}(B^{n-1}M, A)$	Complexe principal du mémoire, 26
Com	Opétrade des algèbres commutatives, 6
Δ	Catégorie simpliciale, 50
Δ	Coproduit de déconcaténation, 23
$\text{Der}_A(B, M)$	Dérivations de B dans M au-dessus de A , 18
D_n	Opétrade des petits disques, 10
\mathcal{E}	Catégorie monoïdale symétrique au-dessus de \mathcal{C} , 2
${}_{\mathbb{P}}\mathcal{E}$	Algèbres sur l'opétrade \mathbb{P} , 6
$\text{End}_{A,M}$	\mathfrak{S} -module des morphismes, 36
End_X	Opétrade des endomorphismes, 5
Ger_n	Opétrade des algèbres de Gerstenhaber, 10
Ger_n^{∞}	Opétrade des algèbres de Gerstenhaber à homotopie près, 44
$h\mathcal{C}$	Catégorie homotopique de \mathcal{C} , 16
$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$	Morphismes entre x et y , 1
I	Unité du produit de composition \circ , 3
\mathbb{k}	Corps fixé de caractéristique nulle, 1
$\Lambda\mathbb{P}$	Désuspension de l'opétrade \mathbb{P} , 10
Lie	Opétrade des algèbres de Lie, 7
\mathcal{M}	Catégorie des \mathfrak{S} -modules, 2
$M\{1\}$	Désuspension d'un \mathfrak{S} -module, 29
${}_{\mathbb{P}}\mathcal{M}$	\mathbb{P} -modules à gauche, 7
${}_{\mathbb{P}}\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$	(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) -bimodules, 7

$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$	\mathbb{Q} -modules à droite, 7
Map	Espace de fonctions, 52
$N_*(G)$	Chaînes normalisées de G , 54
$\mathbb{O}(E)$	Opérate libre sur E , 43
\mathbb{P}, \mathbb{Q}	Opéades quelconques, 4
$\mathbb{P} \circ (A; M)$	Produit de composition linéarisé, 18
$\mathbb{P} \circ X$	\mathbb{P} -algèbre libre sur X , 6
Poi	Opérate des algèbres de Poisson, 9
\mathbb{P}^i	Coopérate duale de Koszul, 43
$S(M)$	Foncteur de Schur, 3
$S_{\mathbb{P}}(M)$	Foncteur de Schur relatif, 8
Σ	Suspension, 2
T^n	\mathfrak{S} -module des arbres à n niveaux, 23
$T^n(s, \nu)$	Arbres à n niveaux et ν nœuds, 34
$\mathcal{U}_{\text{Ger}_n}(A)$	Algèbre enveloppante de Gerstenhaber de A , 26
$\mathcal{U}_{\mathbb{P}}(A)$	Algèbre universelle enveloppante de la \mathbb{P} -algèbre A , 18
$\Omega_{\mathbb{P}}^1(A)$	Module des différentielles de Kähler, 19
$\Omega^{\mathbb{P}^c}$	Construction cobar de la coopérate \mathbb{P}^c , 43
\circ	Produit de composition dans \mathcal{M} , 3
$\otimes_{\mathfrak{S}_n}$	Coinvariants du produit tensoriel, 3
\sqcup	Produit shuffle, 23

Index

- algèbre
 - de Gerstenhaber, 9
 - de Poisson, 9
 - enveloppante universelle, 18
 - sur une opérade, 6
- \mathcal{C} -cofibrant, 20
- catégorie, 1
 - homotopique, 16
 - modèle, 15
 - monoïdale symétrique, 1
 - mon. sym. sur une base, 2
- cofibration, 15
 - acyclique, 15
- complexe bar, 22
- construction cobar, 43
- convention de Koszul, 2
- coopérade, 43
- crochet shuffle, 23

- dérivation, 18
- dg-modules, 1
- donnée quadratique, 43
- dual de Koszul, 43

- E_n -algèbre, 12
- ensemble simplicial, 50
- équivalence faible, 15

- fibration, 15

- acyclique, 15
- de Kan, 51
- foncteur de Schur, 3
 - relatif, 8

- module
 - à droite, 7
 - à gauche, 7
 - bimodule abélien, 36

- objet
 - cofibrant, 16
 - fibrant, 16
- opérade, 4
 - des endomorphismes, 5
 - des petits disques, 10
 - E_n , 12

- produit shuffle, 23
- propriété de relèvement, 15

- quasi-isomorphisme, 18

- réalisation géométrique, 51
- remplacement
 - cofibrant, 16
 - fibrant, 16
- représentation d'une algèbre, 18

- \mathfrak{S} -cofibrant, 20
- \mathfrak{S} -module, 2

Bibliographie

- [And74] Michel ANDRÉ. *Homologie des algèbres commutatives*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 206. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974, p. xv+341. MR0352220.
- [AT14] Gregory ARONE et Victor TURCHIN. « On the rational homology of high dimensional analogues of spaces of long knots ». In : *Geom. Topol.* 18.3 (2014), p. 1261–1322. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2014.18.1261](https://doi.org/10.2140/gt.2014.18.1261). MR3228453.
- [AT15] Gregory ARONE et Victor TURCHIN. « Graph-complexes computing the rational homotopy of high dimensional analogues of spaces of long knots ». In : *Ann. Inst. Fourier (to appear)* (2015). arXiv : [1108.1001](https://arxiv.org/abs/1108.1001) [math.AT].
- [Bat98] M. A. BATANIN. « Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n -categories ». In : *Adv. Math.* 136.1 (1998), p. 39–103. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1006/aima.1998.1724](https://doi.org/10.1006/aima.1998.1724). MR1623672.
- [BK72] A. K. BOUSFIELD et D. M. KAN. *Homotopy limits, completions and localizations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Berlin : Springer-Verlag, 1972, p. v+348. MR0365573.
- [BM03] Clemens BERGER et Ieke MOERDIJK. « Axiomatic homotopy theory for operads ». In : *Comment. Math. Helv.* 78.4 (2003), p. 805–831. ISSN : 0010-2571. DOI : [10.1007/s00014-003-0772-y](https://doi.org/10.1007/s00014-003-0772-y). MR2016697.
- [Bou89] A. K. BOUSFIELD. « Homotopy spectral sequences and obstructions ». In : *Israel J. Math.* 66.1-3 (1989), p. 54–104. ISSN : 0021-2172. DOI : [10.1007/BF02765886](https://doi.org/10.1007/BF02765886). MR1017155.
- [BV68] J. Michael BOARDMAN et Rainer M. VOGT. « Homotopy-everything H -spaces ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), p. 1117–1122. ISSN : 0002-9904. DOI : [10.1090/S0002-9904-1968-12070-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-12070-1). MR0236922.
- [BV73] J. Michael BOARDMAN et Rainer M. VOGT. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, p. x+257. MR0420609.
- [Cat+05] Alberto CATTANEO et al. *Déformation, quantification, théorie de Lie*. T. 20. Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]. Paris : Société Mathématique de France, 2005, p. viii+186. ISBN : 2-85629-183-X. MR2274222.
- [CE48] Claude CHEVALLEY et Samuel EILENBERG. « Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948), p. 85–124. ISSN : 0002-9947. DOI : [10.2307/1990637](https://doi.org/10.2307/1990637). MR0024908.

- [CE56] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956, p. xv+390. MR0077480.
- [Coh76] Frederick R. COHEN. « The homology of C_{n+1} spaces ». In : *The homology of iterated loop spaces*. T. 533.3. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976, p. 207–351.
- [Cur71] Edward B. CURTIS. « Simplicial homotopy theory ». In : *Advances in Math.* 6 (1971), 107–209 (1971). ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1016/0001-8708\(71\)90015-6](https://doi.org/10.1016/0001-8708(71)90015-6). MR0279808.
- [DS95] W. G. DWYER et J. SPALIŃSKI. « Homotopy theories and model categories ». In : *Handbook of algebraic topology*. Amsterdam : North-Holland, 1995, p. 73–126. DOI : [10.1016/B978-044481779-2/50003-1](https://doi.org/10.1016/B978-044481779-2/50003-1). MR1361887.
- [EM53] Samuel EILENBERG et Saunders MACLANE. « On the groups of $H(\Pi, n)$. I ». In : *Ann. of Math. (2)* 58 (1953), p. 55–106. ISSN : 0003-486X. JSTOR : [1969820](https://www.jstor.org/stable/1969820). MR0056295.
- [Fre04] Benoit FRESSE. « Koszul duality of operads and homology of partition posets ». In : *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*. T. 346. Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2004, p. 115–215. DOI : [10.1090/conm/346/06287](https://doi.org/10.1090/conm/346/06287). MR2066499.
- [Fre06] Benoit FRESSE. « Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson ». In : *Ann. Math. Blaise Pascal* 13.2 (2006), p. 237–312. ISSN : 1259-1734. DOI : [10.5802/ambp.219](https://doi.org/10.5802/ambp.219). MR2275449.
- [Fre09] Benoit FRESSE. *Modules over operads and functors*. T. 1967. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2009, p. x+308. ISBN : 978-3-540-89055-3. DOI : [10.1007/978-3-540-89056-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-89056-0). MR2494775.
- [Fre11] Benoit FRESSE. « Iterated bar complexes of E -infinity algebras and homology theories ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 11.2 (oct. 2011), p. 747–838. ISSN : 1472-2747. DOI : [10.2140/agt.2011.11.747](https://doi.org/10.2140/agt.2011.11.747). MR2782544.
- [Fre15] Benoit FRESSE. « Homotopy of Operads & Grothendieck–Teichmüller Groups ». 2015. URL : <http://math.univ-lille1.fr/~fresse/OperadHomotopyBook/>. En prép.
- [Fre98] Benoit FRESSE. « Algèbre des descentes et cogroupes dans les algèbres sur une opérade ». In : *Bull. Soc. Math. France* 126.3 (1998), p. 407–433. ISSN : 0037-9484. NUMDAM : [BSMF_1998__126_3_407_0](https://www.numdam.org/item/BSMF_1998__126_3_407_0). MR1682797.
- [Ger63] Murray GERSTENHABER. « The cohomology structure of an associative ring ». In : *Ann. of Math. (2)* 78 (1963), p. 267–288. ISSN : 0003-486X. JSTOR : [1970343](https://www.jstor.org/stable/1970343). MR0161898.
- [Get95] E. GETZLER. « Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces ». In : *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*. T. 129. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, p. 199–230. arXiv : [alg-geom/9411004](https://arxiv.org/abs/alg-geom/9411004). MR1363058.

- [GJ94] Ezra GETZLER et J. D. S. JONES. *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*. Mar. 1994. arXiv : [hep-th/9403055](https://arxiv.org/abs/hep-th/9403055).
- [GJ99] Paul G. GOERSS et John F. JARDINE. *Simplicial homotopy theory*. T. 174. Progress in Mathematics. Basel : Birkhäuser Verlag, 1999, p. xvi+510. ISBN : 3-7643-6064-X. DOI : [10.1007/978-3-0348-8707-6](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8707-6). MR1711612.
- [GK94] Victor GINZBURG et Mikhail KAPRANOV. « Koszul duality for operads ». In : *Duke Math. J.* 76.1 (1994), p. 203–272. ISSN : 0012-7094. DOI : [10.1215/S0012-7094-94-07608-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-94-07608-4). MR1301191.
- [Har62] D. K. HARRISON. « Commutative algebras and cohomology ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 104 (1962), p. 191–204. ISSN : 0002-9947. DOI : [10.2307/1993575](https://doi.org/10.2307/1993575). MR0142607.
- [Hin97] Vladimir HINICH. « Homological algebra of homotopy algebras ». In : *Comm. Algebra* 25.10 (1997), p. 3291–3323. ISSN : 0092-7872. DOI : [10.1080/00927879708826055](https://doi.org/10.1080/00927879708826055). MR1465117.
- [Hoc45] Gerhard HOCHSCHILD. « On the cohomology groups of an associative algebra ». In : *Ann. of Math. (2)* 46 (1945), p. 58–67. ISSN : 0003-486X. JSTOR : [1969145](https://www.jstor.org/stable/1969145). MR0011076.
- [Kel82] Gregory Maxwell KELLY. *Basic concepts of enriched category theory*. T. 64. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982, p. 245. ISBN : 0-521-28702-2. MR651714.
- [Kon97] Maxim KONTSEVICH. « Formality conjecture ». In : *Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996)*. T. 20. Math. Phys. Stud. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, p. 139–156. MR1480721.
- [Kon99] Maxim KONTSEVICH. « Operads and motives in deformation quantization ». In : *Lett. Math. Phys.* 48.1 (1999). Moshé Flato (1937–1998), p. 35–72. ISSN : 0377-9017. DOI : [10.1023/A:1007555725247](https://doi.org/10.1023/A:1007555725247). MR1718044.
- [KS00] Maxim KONTSEVICH et Yan SOIBELMAN. « Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture ». In : *Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon)*. T. 21. Math. Phys. Stud. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 255–307. arXiv : [math/0001151](https://arxiv.org/abs/math/0001151) [[math.QA](https://arxiv.org/abs/math/0001151)]. MR1805894.
- [KS91] Maxim KONTSEVICH et Yan SOIBELMAN. « Deformation Theory ». Preliminary draft. 1991. URL : <http://www.math.ksu.edu/~soibel/Book-vol11.ps>.
- [Laz55] Michel LAZARD. « Lois de groupes et analyseurs ». In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (3)* 72 (1955), p. 299–400. ISSN : 0012-9593. NUMDAM : [ASENS_1955_3_72_4_299_0](https://www.numdam.org/item/ASENS_1955_3_72_4_299_0). MR0077542.
- [Lei04] Tom LEINSTER. *Higher operads, higher categories*. T. 298. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2004, p. xiv+433. ISBN : 0-521-53215-9. DOI : [10.1017/CB09780511525896](https://doi.org/10.1017/CB09780511525896). MR2094071.

- [Lic77] André LICHNEROWICZ. « Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées ». In : *J. Differential Geometry* 12.2 (1977), p. 253–300. ISSN : 0022-040X. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214433987>. MR0501133.
- [Lod89] Jean-Louis LODAY. « Opérations sur l’homologie cyclique des algèbres commutatives ». In : *Invent. Math.* 96.1 (1989), p. 205–230. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01393976](https://doi.org/10.1007/BF01393976). MR981743.
- [Lod94] Jean-Louis LODAY. « Série de Hausdorff, idempotents eulériens et algèbres de Hopf ». In : *Exposition. Math.* 12.2 (1994), p. 165–178. ISSN : 0723-0869. MR1274784.
- [LTV10] Pascal LAMBRECHTS, Victor TURCHIN et Ismar VOLIĆ. « The rational homology of spaces of long knots in codimension > 2 ». In : *Geom. Topol.* 14.4 (2010), p. 2151–2187. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2010.14.2151](https://doi.org/10.2140/gt.2010.14.2151). MR2740644.
- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE. *Algebraic operads*. T. 346. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Heidelberg : Springer, 2012, p. xxiv+634. ISBN : 978-3-642-30361-6. DOI : [10.1007/978-3-642-30362-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30362-3). MR2954392.
- [LV14] Pascal LAMBRECHTS et Ismar VOLIĆ. « Formality of the little N -disks operad ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 230.1079 (2014), p. viii+116. ISSN : 0065-9266. arXiv : [0808.0457](https://arxiv.org/abs/0808.0457) [math.AT]. MR3220287.
- [Mac63] Saunders MAC LANE. *Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114. Publishers, New York : Academic Press Inc., 1963, p. x+422. MR0156879.
- [Mac65] Saunders MAC LANE. « Categorical algebra ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 71 (1965), p. 40–106. ISSN : 0002-9904. DOI : [10.1090/S0002-9904-1965-11234-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1965-11234-4). MR0171826.
- [Mac98] Saunders MAC LANE. *Categories for the working mathematician*. Second. T. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1998, p. xii+314. ISBN : 0-387-98403-8. MR1712872.
- [Mar04] Martin MARKL. « Homotopy algebras are homotopy algebras ». In : *Forum Math.* 16.1 (2004), p. 129–160. ISSN : 0933-7741. DOI : [10.1515/form.2004.002](https://doi.org/10.1515/form.2004.002). MR2034546.
- [Mar96] Martin MARKL. « Distributive laws and Koszulness ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 46.2 (1996), p. 307–323. ISSN : 0373-0956. NUMDAM : [AIF_1996__46_2_307_0](https://www.numdam.org/item/AIF_1996__46_2_307_0). MR1393517.
- [May72] J. Peter MAY. *The geometry of iterated loop spaces*. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Berlin : Springer-Verlag, 1972, p. viii+175. MR0420610.

- [May77] J. Peter MAY. « Infinite loop space theory ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 83.4 (1977), p. 456–494. ISSN : 0002-9904. DOI : [10.1090/S0002-9904-1977-14318-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1977-14318-8). MR0451235.
- [McC01] John MCCLEARY. *A user's guide to spectral sequences*. Second. T. 58. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2001, p. xvi+561. ISBN : 0-521-56759-9. MR1793722.
- [Mor12] Syunji MORIYA. *Sinha's spectral sequence and homotopical algebra of operads*. Oct. 2012. arXiv : [1210.0996](https://arxiv.org/abs/1210.0996).
- [MS02] James E. MCCLURE et Jeffrey H. SMITH. « A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture ». In : *Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000)*. T. 293. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 153–193. DOI : [10.1090/conm/293/04948](https://doi.org/10.1090/conm/293/04948). MR1890736.
- [MS04] James E. MCCLURE et Jeffrey H. SMITH. « Cosimplicial objects and little n -cubes. I ». In : *Amer. J. Math.* 126.5 (2004), p. 1109–1153. ISSN : 0002-9327. JSTOR : [40067889](https://www.jstor.org/stable/40067889). MR2089084.
- [MSS02] Martin MARKL, Steve SHNIDER et Jim STASHEFF. *Operads in algebra, topology and physics*. T. 96. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2002, p. x+349. ISBN : 0-8218-2134-2. MR1898414.
- [nLa12] *nLAB*. *co-Yoneda lemma*. Version 14. 2012. URL : <http://ncatlab.org/nlab/show/co-Yoneda+lemma>.
- [Pat94] F. PATRAS. « L'algèbre des descentes d'une bigèbre graduée ». In : *J. Algebra* 170.2 (1994), p. 547–566. ISSN : 0021-8693. DOI : [10.1006/jabr.1994.1352](https://doi.org/10.1006/jabr.1994.1352). MR1302855.
- [Qui67] Daniel G. QUILLEN. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin : Springer-Verlag, 1967, iv+156 pp. (not consecutively paged). MR0223432.
- [Qui70] Daniel QUILLEN. « On the (co-) homology of commutative rings ». In : *Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, p. 65–87. MR0257068.
- [Ree73] C. L. REEDY. « Homotopy Theory of Model Categories ». Unpublished preprint. 1973.
- [Sin06] Dev P. SINHA. « Operads and knot spaces ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 19.2 (2006), 461–486 (electronic). ISSN : 0894-0347. DOI : [10.1090/S0894-0347-05-00510-2](https://doi.org/10.1090/S0894-0347-05-00510-2). MR2188133.
- [Son13] Paul Arnaud SONGHAFOUO TSOPMÉNÉ. « Formality of Sinha's cosimplicial model for long knots spaces and the Gerstenhaber algebra structure of homology ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 13.4 (2013), p. 2193–2205. ISSN : 1472-2747. DOI : [10.2140/agt.2013.13.2193](https://doi.org/10.2140/agt.2013.13.2193). MR3073913.

- [Spi01] Markus SPITZWECK. « Operads, Algebras and Modules in General Model Categories ». Thèse de doct. Bonn, jan. 2001. arXiv : [math/0101102](https://arxiv.org/abs/math/0101102).
- [ŠW11] Pavol ŠEVERA et Thomas WILLWACHER. « Equivalence of formalities of the little discs operad ». In : *Duke Math. J.* 160.1 (2011), p. 175–206. ISSN : 0012-7094. DOI : [10.1215/00127094-1443502](https://doi.org/10.1215/00127094-1443502). MR2838354.
- [Tam98] Dmitry E. TAMARKIN. *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*. Mar. 1998. arXiv : [math/9803025](https://arxiv.org/abs/math/9803025).
- [Wil14] Thomas WILLWACHER. « M. Kontsevich’s graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra ». In : *Invent. Math.* 200.3 (juin 2014), p. 671–760. ISSN : 1432-1297. DOI : [10.1007/s00222-014-0528-x](https://doi.org/10.1007/s00222-014-0528-x). MR3348138.